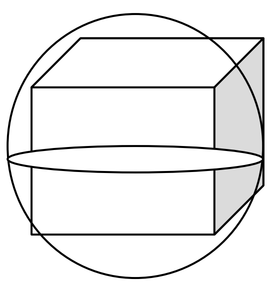
Nicolae Ion Bratu

DISQUISITIONES DIOPHANTICAE



EDITURA *REPROGRAPH* **** CRAIOVA 2006

DISQUISITIONES DIOPHANTICAE

TEOREMA CELOR TREI PATRATE DISTINCTE
ADDENDA DESPRE ULTIMA TEOREMA FERMAT

Nicolae Ion Bratu

PROLOG

In urma cu patru sute de ani, mai intai Bachet de Meziriac (in 1621) si, imediat apoi, celebrul Pierre de Fermat (1601-1665) au enuntat o conjectura deosebita, ca: *"Orice intreg pozitiv se poate exprima sub forma unei sume de cel mult patru patrate"*.
In istoria demonstratiei acestei teoreme s-au implicat matematicienii cei mai de seama ai secolelor urmatoare. Mai intai Leonhard Euler (1707-1783) a descoperit o interesanta identitate privind produsul sumelor de patru patrate. Dupa 149 de ani de la enunt, J.L.Lagrange (in 1770) , folosind identitatea lui Euler si teoria resturilor patratice, a gasit o demonstratie extrem de frumoasa a conjecturii lui Bachet-Fermat si a dat numele sau *"Teoremei celor patru patrate"*. O importanta completare la enunt si demonstratie a adus-o A.M.Legendre (in 1798), iar K F Gauss (1777- 1855) a clarificat cateva lacune. In vremurile noastre, G Hardy si E Wright au produs o a doua demonstratie a teoremei (1979), bazata pe studiul lui A Hurwitz asupra cuaternionilor, si o a treia demonstratie (1999), intorcandu-se la identitatea lui Euler. De fiecare data, evenimentul a fost socotit exceptional, noile demonstratii fiind denumite "teorema deceniului" si, respectiv, 'teorema anului".
Dealungul ultimilor 23 de ani, intr-o serie de memorii si de articole, am anuntat cateva rezultate, care deriva din utilizarea de noi concepte in teoria elementara a numerelor. Am formulat, intre altele, o propozitie, pe care am denumit-o *"Teorema celor trei patrate distincte"* si a carei esenta se rezuma: *"Pentru reprezentarea oricarui numar natural prin suma de patrate sunt suficiente trei numere intregi"*.
Asa dar, conjectura lui Bachet-Fermat, demonstrata de Lagrange si cunoscuta ca *"Teorema celor patru patrate a lui Lagrange"*, am intarit-o si am modificat-o si am redenumit-o. Paternitatea acestei teoreme nu se poate comenta, nu numai ca factor temporal, dar, mai ales, fiindca teorema este o consecinta a unei teorii generale si rezulta firesc dintr-o noua identitate. Gasirea *"Identitatii Bratu"*si a functiei *"Combinare patratica"* a aparut surprinzatoare si au fost putini aceia care au intrevazut valoarea consecintelor; il citez, in primul rand, pe profesorul indian M V Gopalan, cel care mi-a sugerat sa le denumesc *"Identitatea si Functia Bratu"*, precum si pe cercetatorul australian M D Hirschhorn, care mi-a scris *"nu pentru a contrazice, ci numai din necesitatea valorificarii acestor foarte interesante idei"*.
Inca de la comunicare, in Memoriul catre Academia Romana (1983), intuiam ca ar putea exista "rezerve ale savantilor" si incercam a le explica "numai prin numele faimoase asociate teoremelor si solutiilor, pe care le intarim dupa sute de ani"; dar, dupa 2003, au aparut alte teorii, prin care a devenit posibila verificarea teoremei noastre, ceea ce este incurajator. Metodele utilizate au fost, initial, cele algebrice, dar treptat, de-a-lungul anilor, pentru claritate si necontradictie, am preferat metodele elementare. Teoremele au aparenta simplitatii si, daca am trimis lucrarile

unor eminenti matematicieni, cu toate micile lacune, voit aranjate in articole, este de crezut ca ei vor realiza caile de rezolvare, oricat le-ar parea de neasteptate
In ceea ce priveste *Ultima Teorema a lui Fermat*, am socotit ca, dupa reusita demonstrarii ei de catre Andrew Wiles, in 1995, o revenire asupra unor consideratii, prezentate cu multi ani in urma, in Memoriul catre Academie, nu va mai avea impactul de scepticism si aparenta de imposibil, de atunci. In partea a II-a a acestui articol am sistematizat mai vechile mele idei, preferand, mai ales aici, mijloacele teoriei aritmetice a numerelor, similare celor ale vremii "printului amatorilor". Am publicat, insa, pentru prima oara, o lema, care completeaza demonstratia propusa in lucrarile anterioare. Daca metoda denumita "g.s.r." a permis trecerea de la corpul ciclotomic la cel patratic, prin lema demonstrata aici, am reusit trecerea la corpul rational, in care teorema fundamentala a aritmeticii are valabilitate
Scopul acestei lucrari este, asa dar, acela de a reveni asupra importantei, adevarului si frumusetii unora dintre rezultatele cele mai dragi mie din teoria numerelor. In rest, eu socot ca nu-mi este menirea si nu am talentul, dar nici timpul si nici puterea nu-mi mai sunt, pentru a mediatiza si publica mai departe rezultatele obtinute. Acum nu mai este vorba de ani irositi ai unei vieti, ci si de numele si de renumele Tarii Romanesti:lucrarile abordeaza unele dintre cele mai importante teoreme din istoria matematicii. Mai trebuie sa cred, asa cum scriam odata, intr-o *"scrisoare matematica"*, ca vor exista "ingeri", care vor inspira recunoasterea si mediatizarea rezultatelor, mai inainte de plecarea mea din lume..
Lucrarea apare cu sprijinul unei personalitati stiintifice si sociale de prim rang a Romaniei, domnul profesor doctor Irinel Popescu, caruia, si pe aceasta cale, ii exprimam intreaga noastra gratitudine.

Februarie 2006
Autorul

PARTEA I-A

TEOREMA CELOR TREI PATRATE DISTINCTE

Cap.1- FRAGMENTE DIN TEORIA ACTUALA A NUMERELOR

Ne rezumam la prezentarea succinta a stadiului actual al teoriei ecuatiilor diofantice de gradul al doilea, pentru capitolele, in care lucrarile noastre au adus oarece contributii.

1-1 –Teoria formelor patratice

Fie $$f(x) = \boxed{\sum a_{ij} x_j x_i (a_{ij} = a_{ji})} \quad (1)$$

o forma patratica nesingulara, avand coeficienti intregi si un determinant $D \neq 0$.

Reprezentarea elementelor corpului numerelor rationale prin forma **f** se poate reduce la reprezentarea lui zero, adica la rezolvarea ecuatiei diofantice

$$f(x) = 0 \quad (1\text{-}1)$$

In legatura cu reprezentarea unui numar intreg w prin forme patratice pot fi distinse urmatoarele subiecte de cercetare (S):

S1:*daca numarul* **w** *poate fi reprezentat prin forma* **f** *;*

S2:*cate reprezentari exista pentru numarul* **w** *prin forma* **f***;*

S3:*care este reprezentarea concreta a numarului* **w** *prin forma* **f** .

Citand pe L. J. Mordell [3], la intrebarile prime, cercetarile au fost intense si indelungate, implicand nume celebre, de la Fermat si Lagrange la Hasse si Hardy, de la Euler si Gauss la Hermite si Hurwitz, iar rezultatele sunt aproape definitive; celebra teorema Minkovski-Hasse a rezolvat problema solvabilitatii ecuatiei (1-1).

La intrebarea a treia, raspunsurile pentru cazul general au intarziat sa apara, teoria rezolvand cazul formelor patratice binare, si, partial, pentru formele Lagrange, cazul formelor cu trei nedeterminate.

1-2- Teorema Gauss asupra formelor patratice

O problema celebra a fost enuntata de Dickson [1]:

Problema (D)- *Fiind data o solutie rationala pentru ecuatia* $f(x1, x2, \ldots\ldots xn) = 0$, *unde f este un polinom cu coeficienti rationali, sa se gaseasca alta solutie rationala.*

In teoria reprezentarii numerelor intregi prin forme patratice binare, Gauss a enuntat un rezultat remarcabil, care defineste coeficientii matricei unimodulare a unei tramsformari automorfe si raspunde afirmativ Problemei (D), pentru asemenea forme.

Teorema lui Gauss: *Pentru forma patratica binara* $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, *unde presupunem* $(a,b,c) = 1$, *daca transformarea liniara de matrice* $G = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}$ *este automorfa, atunci:*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \alpha = \dfrac{t - bu}{2} \quad ; & \beta = -cu \\ \gamma = au \quad ; & \delta = \dfrac{t + bu}{2} \end{array}} \quad ,$$

unde d este discriminantul formei, iar t si n sunt numere intregi, care verifica ecuatia diofantica de tip Pell
$t^2 - du^2 = 4$
Este valabila si reciproca acestei teoreme.

Ecuatia $t^2 - du^2 = 4$ (2-1)
este denumita ecuatia lui Pell, desi era cunoscuta inca de Fermat.
In teorema lui Gauss, d este un intreg pozitiv si care nu este patrat perfect.
Ecuatia $t^2 + du^2 = 4$ (2-2),
de asemeni cu **d** intreg pozitiv si **d** □**1**, in unele manuale se numeste ecuatia duala a lui Pell, iar in altele se numeste tot ecuatia lui Pell. Fiindca am gasit un alt mod de rezolvare si o aplicatie pentru ambele tipuri de ecuatii, in tratarea Ultimei Teoreme a lui Fermat [v.Partea a II-a-], am preferat cea de-a doua definire.

Observatie 1- Teorema lui Gauss reduce gasirea solutiilor pentru ecuatia diofantica patratica f (x,y) =w la existenta si gasirea solutiilor ecuatiei Pell.
Daca numarul **w** *este reprezentabil prin forma* **f***, atunci vom avea atatea reprezentari cate automorfisme admite forma patratica data, respectiv cate solutii admite ecuatia lui Pell, asociata formei* **f**.

Observatie 2- Numarul solutiilor ecuatiei Pell si determinarea concreta a acestor solutii au fost subiecte rezolvate complet in teorie, in special de catre Gauss si de catre Lagrange. Pentru a ignora solutiile banale, care exista pentru orice intreg **d**, ne vom referi in continuare numai la solutiile ecuatiei Pell in numere intregi pozitive.

Observatie 3- **-a-** Se poate observa ca gasirea solutiilor ecuatiei (2) este echivalenta cu gasirea solutiilor unei ecuatii de forma:

$$x^2 - Dy^2 = 1 \qquad (2\text{-}3),$$

cu **D** intreg pozitiv si care nu este patrat perfect.
S-a demonstrat ca ecuatia (2-3) admite o infinitate de solutii in numere intregi pozitive. Singura rezolvare cunoscuta a problemei de aflare a solutiilor consta intr-o ingenioasa metoda a lui Lagrange. In metoda Lagrange se exclude solutia banala ($\pm$1,0) si se pleaca de la *solutia minima pozitiva:* $x_0+y_0\sqrt{D}$. Prin relatii multiplicative se determina o infinitate de solutii de numere intregi; dar determinarea solutiei minime pozitive nu este totdeauna facila.

-b- Ecuatia Pell de tipul (2-2) are solutii intregi pozitive numai in cazul *d=3* si anume o singura solutie nebanala: *t=1* si *u=1*

-c- Se demonstreaza ca rezolvarea ecuatiilor mai generale

$$x^2 - Dy^2 = w \qquad (2\text{-}4),$$

cu **w** intreg nenul, se reduce la rezolvarea ecuatiei Pell.

1-3– Ecuatia $x^2+y^2=z^2$ (3)

Numerele naturale **x,y,z**, care verifica ecuatia (3), alcatuiesc asa numitul triunghi pitagoreic. Ne vom margini sa amintim ca toate solutiile in numere naturale, in afara unor permutari, se obtin din formulele:

$$x=(m^2-n^2)l; \quad y=2mnl; \quad z=(m^2+n^2)l \qquad (4),$$

unde **m, n, l** sunt numere naturale si **n < m** .

Este, probabil, cea mai veche si studiata ecuatie din literatura. Solutia era cunoscuta inca de la Pitagora, iar, prin utilizarea teoriei aritmetice a intregilor Gauss **x+iy** , solutia a putut fi regasita [4].

Era greu de crezut ca se va putea adauga ceva la teoria acestei ecuatii, ceea ce, totusi, s-a intamplat prin noile noastre concepte si rezultate.

1-3-1- Ecuatia $x^2+2y^2=z^2$ (5)

Pentru teorie, ecuatia a fost interesanta, fiind cel mai simplu caz, in care a fost discutata valabilitatea teoremei fundamentale a aritmeticii in inelul intregilor algebrici, care, aici, sunt de forma **u+v** $\sqrt{-2}$.

Solutiile sunt analoage celor ale ecuatiei pitagoreice:

$$x=(m^2-2n^2)l; \quad y=2mnl; \quad z=(m^2+2n^2)l \qquad (6)$$

1-4- Ecuatia $x^2+by^2+cz^2=w^2$ (7),

unde b si c sunt intregi pozitivi.

Ecuatia a fost in atentia lui Leonhard Euler. Marele matematician Euler, cu intuitia lui exceptionala, propusese, fara demonstratie, o solutie particulara:

$$w=p^2+b\,q^2+c\,u^2 \;; \qquad y=2pq \;;$$

$x = p^2 - bq^2 - cu^2$; $z=2pu$; (8).

Carmichael [2] si Mordell [3] au demonstrat conditiile de rezolubilitate ale ecuatiei (7). Pentru cazul particular b=c=1, Carmichael a dedus chiar solutia generala [2]

Dar prezentarea solutiei generale pentru ecuatia (7) si demonstrarea ei au fost posibile abia dupa 250 de ani, dupa gasirea identitatii Bratu [4]

1-4-1- Ecuatia $x^2+ y^2+ z^2= w^2$ (9)

Pentru cazul particular b=c=1 in ecuatia (7), Carmichael [2], in anul 1915, a utilizat aritmetica intregilor lui Gauss si a reusit sa exprime solutia parametrica generala:

$w = p^2 + q^2 + u^2 + v^2$; $y = 2pq + 2uv$ (10)

$x = p^2 - q^2 + u^2 - v^2$; $z = 2pv – 2qu$

unde p, q, u, v sunt intregi rationali.

1-5- Ecuatia $x^4+ y^4+ z^4= w^2$ (11)

De aceasta ecuatie neomogena s-au ocupat Euler si Carmichael.

Din nou, genialitatea lui Euler a produs o identitate conditionata:

Identitatea E- *Daca $a^2 + b^2 =c^2$, atunci:*

$(ab)^4+ (bc)^4+ (cd)^4= (a^4- b^2c^2)^2$ (12),

prin care a fost demonstrata existenta solutiilor nebanale ale ecuatiei (10).

Utilizand identitatea Euler si solutiile particulare propuse de acesta in rezolvarea ecuatiei (8), Carmichael a aratat ca, plecand de la o solutie nebanala *(a,b,c,d)*, putem dezvolta o infinitate de solutii majorante. El a presupus corect ca ecuatia (10) este satisfacuta prin solutia particulara:

$$w = p^2+q^2+r^2 \; ; \qquad y^2= 2pq \; ; \qquad (13)$$
$$x^2 = p^2 - q^2 - r^2 \; ; \qquad z^2 = 2pr$$

Mai tarziu, Mordell (1965) a extins solutiile particulare (13) pentru ecuatiile:

$$x^4+ by^4+ cz^4= w^2 \qquad (14).$$

Completarea acestor rezultate a fost posibila prin utilizarea *identitatii Bratu*.

1-6- Propozitii de reprezentare a numerelor prin sume de patrate

S-a demonstrat ca problema reprezentarii- sau descompunerii- numerelor naturale in sume algebrice de patrate se poate reduce la aceeasi problema pentru numerele prime.

Reproducem cateva propozitii de referinta pentru acest capitol {[1],[2],[3]}:

P1-(generala)**-** *Daca* ***a*** *si* ***b*** *sunt doua numere naturale date, relativ prime, iar daca numarul prim* ***w*** *se poate reprezenta prin forma patratica* $\boldsymbol{ax^2 + by^2}$ *, atunci reprezentarea sa este unica;*

Este valabila si propozitia reciproca: *Daca numarul natural* ***w*** *are o singura descompunere in forma patratica*

***a** x^2 + **b**y^2, atunci numarul **w** este numar prim, sau o putere de numar prim;*

P2- *Pentru ca un numar prim **w** sa fie reprezentat sub forma $x^2 + y^2$, este necesar si suficient ca numarul **w** sa fie de forma **4k+1**; rezulta din **P1** ca descompunrerea este unica;*

P3- (Triunghiul pitagoreic)- *Pentru numarul natural* **z** *dat, conditia necesara si suficienta, ca ecuatia $x^2 + y^2 = z^2$ sa aiba cel putin o solutie in numere naturale,este ca numarul* **z** *sa aiba cel putin un divizor de forma **4k+1***

P4- *Orice numar prim impar este diferenta patratelor a doua numere naturale si aceasta in mod unic;*

P5- *Pentru ca un numar prim **w** sa fie reprezentat sub forma $x^2 + 2y^2$, este necesar si suficient ca numarul **w** sa fie de forma **8k+1** sau **8k+3**; rezulta din **P1** ca descompunerea este unica;*

P6- *Pentru ca numarul prim impar **w** sa fie de de forma $x^2 - 2y^2$, este necesar si suficient ca numarul* **w** *sa fie de forma **8k** +**1** sau **8k** +7;*

P7- (Teorema celor patru patrate a lui Lagrange)- *Pentru orice numar natural **W**, ecuatia $X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = W$ **(L)** are cel putin o solutie **(X,Y,Z,T)** in numere intregi;*

P8- (Contributia lui Legendre la Teorema lui Lagrange)- *Pentru orice numar natural **W**, care nu este de forma $4^k(8l+7)$, ecuatia $X^2 + Y^2 + Z^2 = W$ **(L1)** are cel putin o solutie **(X,Y,Z)** in numere intregi;*

P9- (Consecinta a propozitiei P8)- *Pentru orice numar intreg* W*, ecuatia* $X^2 + Y^2 + Z^2 = W^2$ *are cel putin o solutie* (X,Y,Z) *in numere intregi;*
Hurwitz a aratat ca, pentru $W = 2^k$ *, singura solutie posibila in numere intregi este cea banala:* $X=W$ *si* $Y=Z=0$*; iar in cazul* $W=5.\ 2^k$ *singura solutie posibila in numere intregi este aceea cu* $Z=0$.
P10- *Pentru fiecare numar natural* W*, ecuatia* $X^2 + Y^2 - Z^2 = W$ *are o infinitate de solutii in numere intregi* (X,Y,Z)

Cap.2- CONTRIBUTII LA TEORIA ACTUALA A NUMERELOR

De-a-lungul anilor, o serie de comentatori, de la academicianul roman N. Teodorescu (1986) pana la profesorul australian M.Hirschhorn (2004), ne-au sfatuit ca, din motive de claritate, sa evitam prezentarea intr-o singura lucrare a mai multor probleme rezolvate. Amintesc, de exemplu, ca o revista romaneasca mi-a recomandat ca, intr-un articol, sa ma rezum la rezolvarea problemei lui Diofant, privind "triunghiurile schioape". Dar noi am enuntat noi concepte, am dezvoltat noi metode si nu am reusit a raspunde acelor recomandari; poate si fiindca timpul si locul altfel nu au permis. Acum, insa, vor fi relevate numai o anume parte dintre rezultatele publicate anterior.
Cu exceptia identitatii, denumita de M V Gopalan *"Identitatea Bratu"*, a functiei derivate, *"Combinare Patratica"*, si a *"Teoremei celor Trei Patrate Distincte"*, prezentarea rezultatelor noastre va fi limitata la enuntarea acestora; demonstratiile detaliate pot fi gasite in lucrarile din bibliografie {[4]-[9]}.

2.1- Metoda de generare a solutiilor rationale- Varianta matriceala - Generalizarea teoremei lui Gauss.

Am prezentat o metoda generala cu aplicabilitate pentru cele trei categorii de subiecte din teoria ecuatiilor diofantice (v.1-1).
Obiectele tratarii noastre au fost ecuatiile omogene si cele reductibile la acestea, scrise sub forma:

$$a_1x_1^2+\ldots\ldots+a_ix_i^2-\ a_{i+1}x_{i+1}^2-\ldots\ldots-a_nx_n^2=r \qquad (15),$$

unde $\mathbf{a_1}$ **,**$\mathbf{a_2}$ **……**$\mathbf{a_n}$ sunt numere intregi pozitive, **r** fiind, de asemeni, numar intreg.
Pentru ecuatiile de forma (15), rezolubilitatea in numere intregi poate fi echivalata cu existenta solutiilor in numere rationale.

Nota- Mentionam ca, in cazul ecuatiilor binare, in corpurile patratice imaginare **R**$\sqrt{-d}$, obiectele cercetarii noastre sunt cazurile pentru d >1, excludem cazul **R**$\sqrt{-1}$**;** analog, in corpul patratic real, excludem cazul R$\sqrt{\ }$ **.**

Principiul metodei deriva din urmatoarea lema, intr-o formulare simplificata, cu referire la multimea solutiilor in numere rationale pozitive:

Lema 1a – *Fiind data o solutie nenula* (x_1 , x_2 …..x_n) *a unei ecuatii patratice cu n>1, se pot deduce, printr-o relatie de recurenta, cel putin alte doua solutii in numere rationale pozitive; cu exceptia cazului cand ecuatia admite si solutia banala, din care se poate deduce numai o singura alta solutie.*

In teoria noastra, *solutia nenula* este aceea in care, cel putin o variabila x_i nu este nula, adica, pentru teoria actuala, *solutia neidentic nula*, iar solutia in care numai o singura variabila este nenula $x_i \neq 0$, celelate fiind nule, este denumita *solutia banala*

Generalizarea teoremei lui Gauss, propusa de noi- {[4], [8]}- este varianta matriceala a unei metode de generare a solutiilor rationale, pentru ecuatii de gradul al doilea cu **n** nedeterminate, daca exista o solutie rationala nenula.
Sa consideram ca forma patratica **f** reprezinta un numar intreg **r** , cu ecuatia omogena atasata sub forma desfasurata (15).
Determinantul formei va fi : $\mathbf{d = (-1)^{n-i} \ a_1 . a_2 \ldots . a_n}$,
iar suma algebrica a coficientilor am denumit-o "urma" formei patratice diagonale si va fi :
$\mathbf{S = a_1 + \ldots .+ a_i - \ldots\ldots - a_n}$; putem presupune $S \neq 0$.

Teorema generala de tip Gauss *Pentru fiecare forma patratica omogena, se poate determina o transformare liniara automorfa, definita prin matricea unimodulara urmatoare:*

$$B = -\frac{1}{S}\begin{Vmatrix} 2a_1 - S & 2a_2 & .... & 2a_{i+1} & .... & 2a_n \\ 2a_1 & 2a_2 - S & .... & 2a_{i+1} & .... & 2a_n \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 2a_1 & 2a_2 & .... & 2a_{i+1} + S & .... & 2a_n \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 2a_1 & 2a_2 & .... & 2a_{i+1} & .... & 2a_n + S \end{Vmatrix} \qquad (16),$$

unde a_1 , ,…….a_n , *numere intregi pozitive, sunt coeficientii formei reduse canonic, iar* **S**, *numar intreg nenul, este" urma formei patratice".*
Pemtru r *numar intreg, daca ecuatia (15) are o solutie* $\mathbf{X_1}$, *matrice coloana, atunci matricea* **B** *genereaza multimea solutiilor rationale prin relatia de recurenta matriceala :*
$\mathbf{X_{i+1} = X_i . B}$. *Se verifica:* $\mathbf{B^2 = I}$ *si* $\mathbf{det^2\, B = 1}$.
Pentru formele patratice binare, in corpul patratic real R $\sqrt{\ }$ *si pentru solutii intregi, matricea* **B** *este identica matricei Gauss* **G**

2-2- Metoda generarii solutiilor rationale- Varianta termenului- Grafuri

Ne intorcem la problema Dickson pentru cazul general si cu exemplificari pentru cateva ecuatii binare, ternare si cuaternare omogene, cunoscute in literatura.
Metoda de gasire a multimii solutiilor rationale ale ecuatiilor patratice am prezentat-o in doua variante [4]. Varianta matriceala a fost descrisa mai sus.

“Varianta termenului” este metoda practica de deducere a unor alte solutii rationale, daca se cunoaste o solutie nenula, pentru ecuatii de gradul al doilea cu numar de nedeterminate oarecare. Dintr-o solutia data **(x_1 , x_2 …..x_n)** se deduc solutiile

(x_1+t, x_2+t,….. , x_n+t), unde

$$t = -\boxed{\frac{2}{S}(a_1x_1 \pm a_2x_2 \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm a_nx_n)} \quad (17),$$

iar **S** este “urma” , definita mai sus. Numarul total de noi solutii- inclusiv cele confundate- ale ecuatiei generale (15), deduse din solutia data, prin relatia de recurenta, este egal cu numarul valorilor termenului **t**, iar numarul acestor valori, incluzand si pe cele confundate, va fi $\boxed{2^{n-1}}$

Daca definim o relatie de ordine, reprezentarea multimii solutiilor se poate face printr-un graf orientat. Pentru simplificarea prezentarii, ecuatiile patratice diofantice au fost notate cu E^2 , multimea solutiilor ecuatiei cu F^2, iar graful de reprezentare a multimii solutiilor prin G^2.

O forma echivalenta si completata a **Lemei 1a** este urmatoarea:

Lema 1b- *Multimea* F^2 *a solutiilor ecuatiei* E^2 *este izomorfa cu multimea nodurilor grafului orientat* G^2*, definit printr-o relatie de recurenta.*

Pentru a exemplifica metoda generala propusa, am utilizat-o pentru cazurile de ecuatii mai cunoscute si rezolvate in teoria actuala, ca solvabilitate a ecuatiei si constructie a solutiilor; aceste exemple le prezentam in continuare.

2.3- Ecuatia lui Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ (18-1)

Am studiat aceasta ecuatie in lucrarile anterioare {[3], [4]}, proband teoria prin exemple. In continuare ne vom referi numai la aspecte generale, care vor fi reluate in Partea a II-a lucrarii, unde ecuatia de tip Pell are un rol important.

In cap.1.2 am prezentat succint concluziile teoriei actuale. Mentinem aceleasi ipoteze, in care D este un numar intreg si care nu e patrat perfect. In metoda Lagrange, pentru cazul real, D>0, se pleaca de la *solutia minima pozitiva* $x_0+y_0\sqrt{D}$ si, prin relatii multiplicative se determina o infinitate de solutii in numere intregi, iar in cazul imaginar, pentru D < - 3, nu exista decat solutiile banale.
In metoda noastra se determina multimea solutiilor de numere rationale, care include multimea solutiilor de numere intregi; acesta este un aspect esential al metodei propuse. Ecuatia Pell nu mai are rolul de pivot pentru intreaga clasa de ecuatii patratice binare.
In determinarea solutiilor, pentru ecuatia generala (2-4) si pentru S ≠ 0, se poate pleca de la orice solutie, cel mai simplu chiar de la solutia banala (±1,0), daca exista aceasta, iar, printr-o relatie de recurenta:

$$\mathbf{X_{i+1} = X_i \cdot B} \quad ,$$

se genereaza intreaga multime a solutiilor [4] . In reprezentarea grafica, multimea solutiilor rationale este un lant.

Pentru ecuatia (2-4), cu **w** numar intreg si **D** □ **1**, matricea **B**, se scrie:

$$\boxed{B = \frac{1}{D-1}\begin{bmatrix} D+1 & 2D \\ 2 & D+1 \end{bmatrix}} \qquad (19\text{-}1)$$

In privinta determinarii solutiilor intregi, este cunoscut ca, daca matricea **B** este automorfa, atunci si matricea putere $\mathbf{B}^{\mathbf{r}}$ este automorfa. Din conditiile ca $\mathbf{B}^{\mathbf{r}}$ sa aiba elemente intregi, se determina o perioada de lungime finita **r**, pentru a selecta din multimea solutiilor rationale **(x,y)**, pe cele de numere intregi; procedeul fractiilor continue poate fi, astfel, evitat [4].

Prin metoda noastra, de determinare a solutiilor rationale, **Lema 1a** se aplica si in cazul imaginar, adica pentru ecuatia:

$$\mathbf{x^2 + Dy^2 = 1} \qquad (18\text{-}2),$$

respectiv pentru ecuatia mai generala

$$\mathbf{x^2 + Dy^2 = w} \qquad (18\text{-}3),$$

cu **w** numar intreg si **D** □ **-1 .**

Matricea **B**, pentru D □ -1, se scrie analog:

$$\boxed{B = \frac{1}{D+1}\begin{bmatrix} D-1 & 2D \\ -2 & D-1 \end{bmatrix}} \qquad (19\text{-}2)$$

Numarul de solutii rationale, daca exista o solutie particulara, nu este aprioric finit. Ecuatia cu **D=3**, la care, pentru o solutie nebanala (A,B), se pot deriva numai alte doua solutii rationale, este o exceptie.

2.4- Ecuatia pitagoreica $x^2+ y^2= z^2$ (3)

Pentru aceasta ecuatie si pentru cele urmatoare, “urma formei patratice”, S, avand valorile □1 sau □2, prin utilizarea variantei matricele, ca si prin utilizarea variantei termenului, sunt generate solutii intregi. Ne vom limita la prezentarea solutiilor intregi pozitive, incluse in multimea solutiilor, notata F.
Graful acestei ecuatii (3) este un arbore si cuprinde solutiile reduse, respectiv cele cu **l=1** in relatia (4)

Propozitie 11 *Daca pentru ecuatia* (3) *exista o solutie redusa in numere intregi pozitive, nebanala, atunci exista patru valori distincte* **t***, intre care una negativa si trei pozitive, astfel incat sa obtinem alte patru noi solutii reduse*, *exprimate prin relatia de recurenta:*

$$\mathbf{x_{i+1} = x_i + t \,;\ y_{i+1} = y_i + t \,;\ z_{i+1} = z_i + t}\,;\ \textit{in care}$$
$$\mathbf{t= 2(z_i \pm x_i \pm y_i)} \qquad (18).$$

Daca, asa cum am amintit, prin utilizarea teoriei intregilor Gauss **x+iy** , Carmichael a putut regasi relatiile vedice, noi am oferit alte demonstratii pentru determinarea solutiilor: intai utilizand “varianta termenului”, iar apoi prin “combinarea patratica”.

Propozitie 12 *–Relatiile vedice rezulta din varianta termenului a metodei de generare a solutiilor rationale pentru ecuatia pitagoreica.*

Cu **t= 2T**, prin integrarea sistemului de ecuatii rezultate prin (18) si (3):

$$T \pm x = a \;;\; T \pm y = b \;;\; T - z = a + b \;;\; T^2 = 2ab \qquad (S)$$

obtinem relatiile parametrice cunoscute pentru cele trei variabile, completate cu o relatie pentru termenul **t**:

$$x = m^2 - n^2 \;;\; y = 2mn \;;\; z = m^2 + n^2 \;;\; t = 4n(m \pm n) \qquad (4\text{-}1)$$

Lema 1b a fost demonstrata sub o forma specifica:

Propozitie 13 - *Laticea multimii solutiilor intregi pozitive reduse ale ecuatiei* (3) *se reprezinta printr-un arbore orientat in sensul crescator al variabilei* **z**.
Exista un izomorfism intre multimea **F** *a solutiilor ecuatiei* **E** *si multimea nodurilor arborelui* **G**

Propozitia 13 s-a demonstrat [3, 4] prin doua metode: mai intai, utilizand inegalitatile

$$x+y > z \quad (i) \qquad \text{si} \qquad x+y < \boxed{}\, z \quad (ii),$$

precum si proprietatea multimilor numerabile de a avea un un element minimal, care, in cazul multimii **F**, este solutia “radacina” **(1,0,1)**.
Mai sugestiva este o demonstratie “constructiva”, pe care o reproducem succint:

Daca exista o solutie oarecare cu $\mathbf{Z = m^2 + n^2}$ *, unde* m>n*, si utilizam termenul minorant* t= -4n (m - n)*, obtinem o alta solutie* $\mathbf{Z1 = (m-2n)^2 + n^2 < Z}$*; analog obtinem* X1< X *si* Y1 <Y*; continuand procesul descendent, termenul limita va fi solutia banala. Am*

demonstrat ca toate radacinile intregi pozitive ale ecuatiei pitagoreice E*, si numai acestea, se regasesc ca noduri ale grafului* **G**. *Metoda utilizata in demonstrare am denumit-o "metoda descendentei finite"*.

Multimea solutiilor intregi pozitive este numarabila, functia de izomorfism fiind $\mathbf{3^k}$

Matricea **B**- din varianta matriceala- se scrie:

$$B= \boxed{\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}}$$

Solutia banala **(-1,0,1)** am denumit-o "radacina", iar solutia **(3,4,5)**, conexata printr-un arc al grafului de solutia banala, am denumit-o "tulpina".

Observatie 4- *Am orientat arborele* **G** *in sensul crescator al variabilei* **z***, iar, astfel orientat, cu exceptia solutiei banale* **(1,0,1)***, arborele va avea gradul de intrare* **1** *si gradul de iesire* **3**.

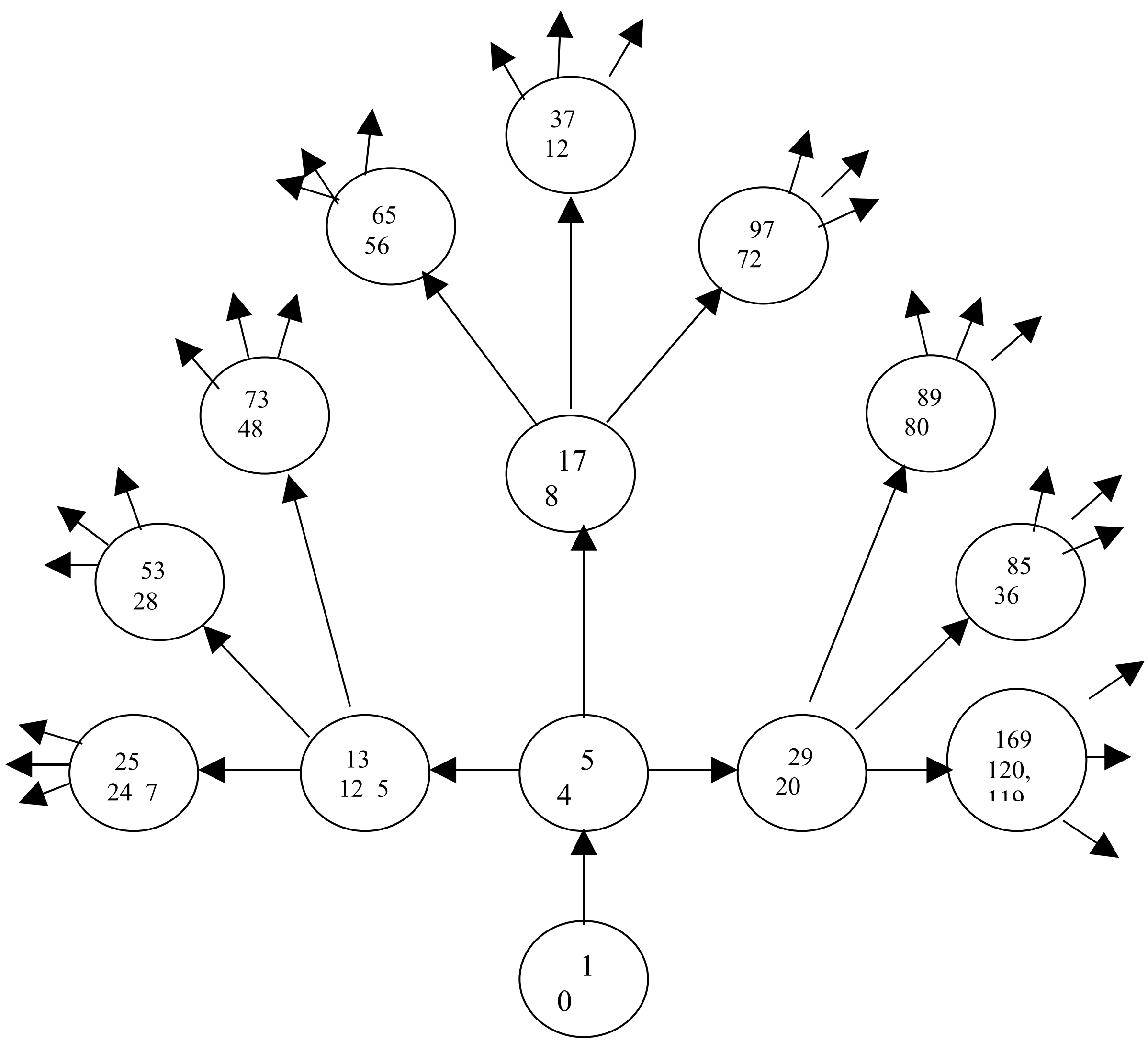
O consecinta a teoriei este :

Propozitia 14- *Orice numar prim impar* **z***, de forma* **8k+1** *sau de forma* **8k+5***, se gaseste reprezentat ca element intr-un nod al grafului ecuatiei* $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$**.**

Nota – Pentru completitudine, trebuie sa aratam ca exista o alta multime H de solutii in corpul numerelor complexe si sa stabilim intersectia multimilor F si H. Daca vom considera solutia "radacina" (-i, -1, 0), din care se deduce termenul t= 2(1+i) si, prin acest termen, o alta solutie (2+i, 1+2i , 2+2i), si vom continua procesul de constructie, vom obtine un nou graf D. Se demonstreaza usor ca intersectia multimilor F si H este nula, sau ca grafurile G si D nu au noduri comune.

Arborele G al solutiilor ecuatiei pitagoreice este prezentat in fig 1.
In arborele G, triunghiurile schioape, cu exceptia celui banal, apar pe orizontala, incepand cu triunghiul (3,4,5), in partea stanga fiind triunghiurile de tipul 1, cu (5,12,13),etc, iar in partea dreapta fiind triunghiurile de tipul 2, cu (21,20,29), etc.

FIG. 1- ARBORELE SOLUTIILOR INTREGI POZITIVE ALE ECUATIEI $X^2 + Y^2 = Z^2$



Se poate da o rezolvare pentru *Problema lui Diofant*, privind *“triunghiurile schioape”*, problema de care s-a ocupat insusi Fermat. Ca si Fermat, deosebim doua tipuri

de triunghiuri schioape: de tipul 1, in care **y+1=z**, si de tipul 2, in care **y+1=x**.
Prin metoda expusa mai sus, aceasta problema a lui Diofant are urmatoarea rezolvare:

Propozitia 15- *Orice triunghi schiop* (X,Y,Z) *se deduce din alt triunghi schiop* (x,y,z)*, de "dimensiuni mai mici" (dupa Diofant), sau precesor in arborele G (dupa orientarea arborelui, definita in* Observatia 4*, de mai sus), prin" metoda termenului", utilizand* $t_1=2(x-y+z)$ *pentru generarea triunghiurilor de tipul 1 si utilizand* $t_2=2(x+y+z)$ *pentru generarea triunghiurilor de tipul 2.*

2.5- Ecuatia $x^2+2y^2=z^2$ (5)

Din punct de vedere al functiei "combinare patratica", pe care o vom trata in capitolul urmator, aceasta ecuatie este "geamana" cu ecuatia pitagoreica (3).

Termenul t, din relatia de recurenta (15), se scrie analog:

$$t=(z_i \pm x_i \pm 2y_i) \qquad (19)$$

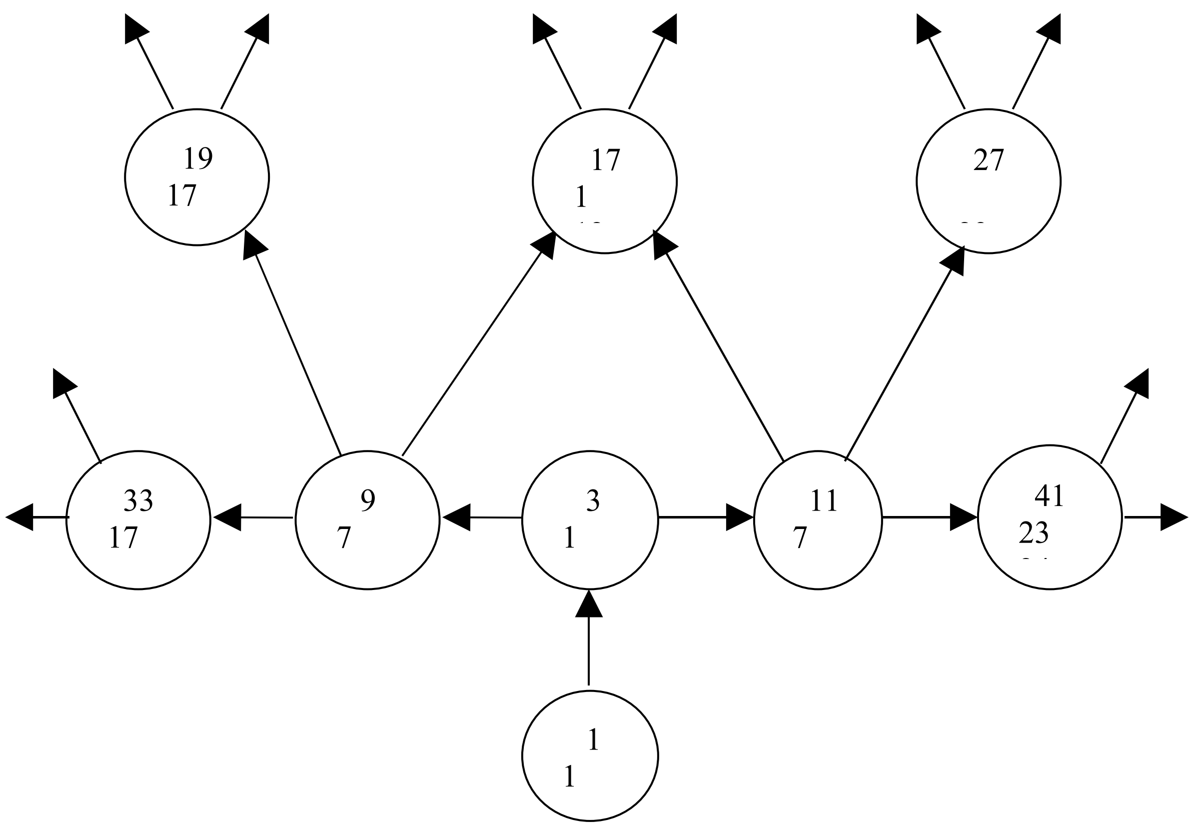
Solutiile acestei ecuatii (5), sub forma (6), rezulta prin teoria noastra - analog cap.2.3 - fara a mai fi necesara referirea la intregii algebrici de forma $u+v\sqrt{-2}$.

Analog ecuatiei pitagoreice, am aratat:

Propozitia 16- *Orice numar prim impar* **z** *de forma* **8k+1** *sau de forma* **8k+3** *se gaseste reprezentat, ca element intr-un nod al grafului ecuatiei* $\mathbf{x^2 + 2y^2 = z^2}$**.**

Graful solutiilor ecuatiei (10) este prezentat in figura 2

FIG. 2- GRAFUL SOLUTIILOR INTREGI POZITIVE ALE ECUATIEI
$X^2 + 2Y^2 = Z^2$



Geometric, numerele naturale, care verifica ecuatia (5), definesc un paralelipiped patratic, unde **x** este inaltimea, **y** este latura bazei patratice, iar **z** este diagonala paralelipipedului patratic; daca am avea relatia **x=y**, atunci paralelipipedul ar fi un cub. Astfel se poate demonstra o propozitie analoaga problemei lui Diofant privind *"triunghiurile schioape"* din ecuatia pitagoreica. Daca vom defini *"cubul schiop"*, prin relatia intre marimile muchiilor bazei **y□1=x**, problema analoaga celei a lui Diofant va avea urmatoarea rezolvare:

Propozitia 17- *Orice "cub schiop"* **(X,Y,Z)** *se deduce din alt "cub schiop"* **(x,y,z)***, precesor in arborele* **G** *(dupa orientarea arborelui, definita in* Observatia 4*), prin metoda termenului, utilizand* **t=(x+2y+z)**.

In arborele **G** din fig 2, muchiile "cuburilor schioape" , cu exceptia cubului degenerat in patratul bazei, apar pe orizontala, incepand cu cele ale paralelipipedului **(1,2,3)** si continuand in partea dreapta a grafului cu **(7,6,11), (23,24,41)**, etc.

2.6- Ecuatia $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ (9).

Ecuatia cuaternara patratica omogena are un rol important in reprezentarea numerelor prin sume de patrate.

Am notat ecuatia (9) prin $\mathbf{E_3^2}$, multimea solutiilor intregi pozitive reduse ale ecuatiei prin $\mathbf{F_3^2}$, iar graful corespondent prin $\mathbf{G_3^2}$.

Am presupus **(x,y,z,w)** o solutie redusa, cu variabilele relativ prime doua cate doua, precum si cu **x** si **w** impare, iar cu **y** si **z** pare.

S-a demonstrat:
Propozitia 18- *Pentru ecuatia* $\mathbf{E_3^2}$*, solutiile sunt exprimate prin expresiile parametrice* (10) *si numai prin acestea.*

Solutiile (10) au fost obtinute anterior de Carmichael [2] prin utilizarea intregilor Gauss, **x+iy** , si au fost regasite de noi [4], prin integrarea unui sistem de ecuatii **(S')**, analog ecuatiei pitagoreice (v. cap.2.3).
Dar utilizarea identitatii Bratu ofera o demonstratie mai simpla si mai eleganta (v cap,3)

Referitor la graful $\mathbf{G_3^2}$, atasat ecuatiei $\mathbf{E_3^2}$, observam :
Nodurile si arcele grafului se exprima aplicand relatiile generale (17):

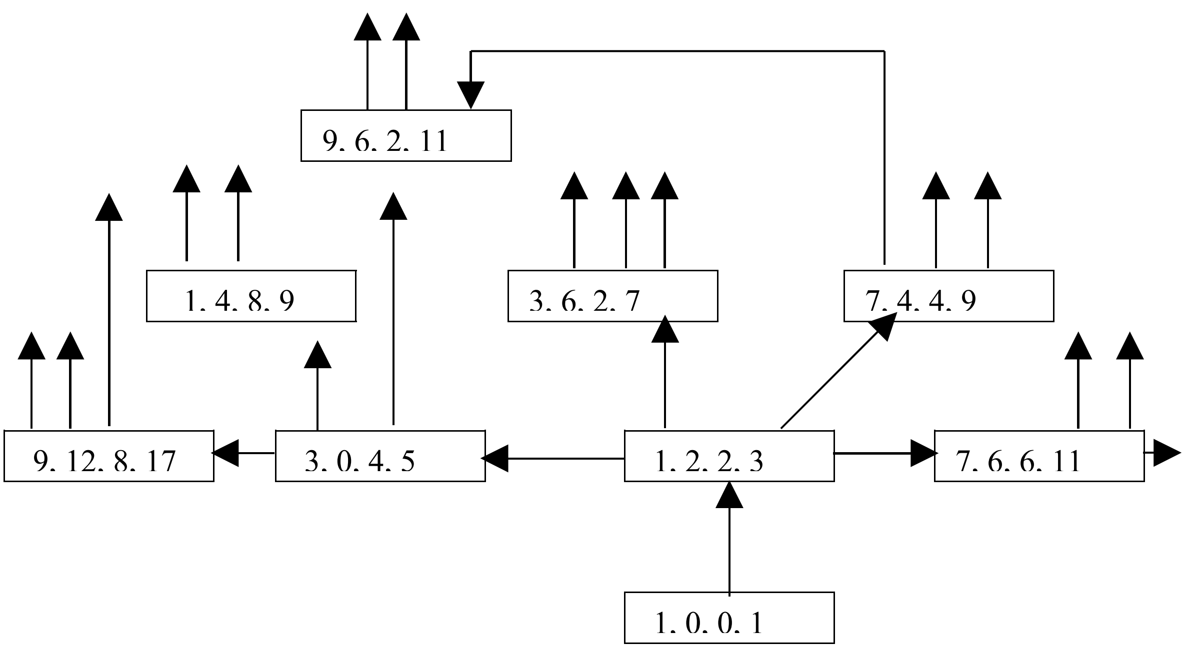
$$\mathbf{x_{i+1} = x_i + t; \quad y_{i+1} = y_i + t;}$$
$$\mathbf{z_{i+1} = z_i + t; \quad w_{i+1} = w_i + t;} \quad \text{in care}$$
$$\mathbf{t = w \pm x \pm y \pm z} \qquad (20)$$

In varianta matriceala, solutiile sunt generate prin relatia $\mathbf{S_{i+1} = S_i . B}$, iar matricea **B** se scrie:

$$B=\boxed{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}} \qquad (21)$$

Graful G_3^2 este prezentat in Fig.3

FIG. 3 - GRAFUL SOLUTIILOR INTREGI POZITIVE ALE ECUATIEI $X^2 + Y^2 + Z^2 = W^2$



Demonstrarea **Lemei 1b** pentru aceasta ecuatie este analoaga tratarii ecuatiei pitagoreice {[4], [5], [9]}. Metoda utilizata in demonstratie a fost "constructia solutiilor" si "descendenta finita", pentru o multime bine ordonata.

Propozitie 19 - *Exista un izomorfism intre multimea* $\mathbf{F_3^2}$ *a solutiilor ecuatiei* $\mathbf{E_3^2}$ *si multimea nodurilor grafului* $\mathbf{G_3^2}$, *orientat in sensul crescator al variabilei* **w**.

Este necesar si suficient ca, aplicand procedeul "constructiei", respectiv al generarii solutiilor ecuatiei $\mathbf{E_3^2}$, sa gasim un drum pe graful $\mathbf{G_3^2}$, care sa aiba ca noduri terminale solutia ordinara $\mathbf{S_0 = (1,0,0,1)}$ si o solutie oarecare, nenula $\mathbf{S_i}$
Pentru partea intaia a propozitiei s-a utilizat procedeul constructiei, iar, pentru partea a doua, am aratat ca propozitia poate fi demonstrata prin doua metode: mai intai utilizand inegalitatile $\mathbf{2w > x+ y+z > w}$,
iar in a doua metoda, prin utilizarea solutiile parametrice (10), presupunand $\mathbf{p>q}$ si $\mathbf{u>v}$, si a identitatii conditionate:

$$\mathbf{(y+z-w)^2 + (z+x-w)^2 + (x+y-w)^2 = (2w-x-y-z)^2}$$

Uzand de termenul minorant $\mathbf{t= -(x+y+z-w)}$ si coborand pe graf de la o solutie oarecare **S** , obtinem efectiv un sir de valori descrescatoare al variabilelor **w**, respectiv un sir de solutii $\mathbf{S_i}$, care are ca limita solutia banala $\mathbf{S_0 = (-1,0,0,1)}$. Acest procedeu l-am denumit *"al coborarii finite",* dupa numele dat de insusi Fermat minunatului "*procedeu al coborarii infinite"*, descoperit de el si utilizat pentru demonstrarea Marii Teoreme a lui Fermat , in cazul exponentului n=4 (v. Partea a II-a)

2.7- Ecuatia $x^2+y^2+2z^2=w^2$ (22)

Din punct de vedere al functiei “combinarea patratica”, aceasta ecuatie este “geamana” cu ecuatia (9).

Am preferat [4] sa construim graful ecuatiei echivalente:

$$x^2+y^2+z^2=2w^2 \qquad (22')$$

care se finalizeaza intr-un graf dublu:

$\mathbf{w_i = 1+4i}$ si $\mathbf{w_j = 3+4j}$ (23),

unde **i** si **j** sunt oricare numar natural.

Am demonstrat:

Propozitie 20- *Orice numar prim impar* w *se gaseste reprezentat, ca element al unui nod, respectiv al unei solutiii de numere intregi* (x,y,z)*, atat in graful ecuatiei*

$\mathbf{x^2+y^2+z^2=w^2}$, *cat si in graful ecuatiei gemene*

$\mathbf{x^2+y^2+2z^2=w^2}$.

2.8- Cateva conjecturi propuse

Din 1998, pana in 2001, cand a plecat dintre cei vii, fratele meu, Ion Ion Bratu, a propus rezolvarea unor probleme privind numerele prime si pentru ipoteza aditiva Goldbach, pe care le prezint mai jos, sub forma de conjecturi. Utilizarea conceptelor introduse de noi in teoria numerelor este o metoda, care poate conduce la unele rezultate in capitolele citate.

O generalizare a Teoremei lui Euclid consta in **Teorema lui Dirichet**:

In orice clasa de resturi prima cu modulul exista o infinitate de numere prime.

Metodele propuse ofera demonstratii ale unor cazuri particulare ale Teoremei lui Dirichlet, referitoare la infinitatea numerelor prime.

2.8.1- Conjectura 1- *Demonstrarea teoremei lui Dirichlet in cazul progresiilor aritmetice* 1+8k *si* 5+8k*, utilizand metoda generarii solutiilor intregi pozitive ale ecuatiei* $\mathbf{z^2 = x^2 + y^2}$

Multimea S a valorilor variabilei z este compusa din submultimea P a numerelor prime de forma 1+4k si submultimea R a produselor acestor numere prime;
La oricare pas ‘i‘ de crestere a grafului, submultimea Ri nu va fi nula.

Analog este posibila:
2.8.2- Conjectura 2- *Demonstrarea teoremei lui Dirichlet in cazul progresiilor aritmetice* 1+8k *si* 3+8k*, utilizand metoda generarii solutiilor intregi pozitive ale ecuatiei* $\mathbf{z^2 = x^2 + 2y^2}$

Cap.3- Identitatea Bratu - Combinarea patratica – Teorema celor trei patrate distincte

Dupa gasirea unei noi identitatii si a unei functii derivate, rezultatul final si pe care l-am considerat a fi cel mai spectacular a fost exprimarea solutiilor generale ale ecuatiei (7), propuse de Euler, precum si solutiile unui set de patru ecuatii denumite “gemene”; modificarea si intarirea “Teoremei celor patru patrate a lui Lagrange” a aparut ca o consecinta a teoriei noastre.

Am evaluat gresit ca gasirea unei metode generale de rezolvare a ecuatiilor omogene de gradul al doilea ar avea o insemnata valoare. In aceasta privinta, utilitatea practica va decide neindoielnic in timp. Am evaluat gresit ca a gasi solutia generala a unei ecuatii, propusa de marele Euler si nerezolvata vreme de 250 de ani, intr-un cadru general al rezolvarii altor patru ecuatii, denumite “gemene”, ar fi mai importanta. In realitate, aprecierea unui rezultat de catre savanti este filtrata prin procuparile lor din acel timp. Ori ecuatia lui Euler era lasata in uitare, crezand ca nu se mai poate face vreun progres, iar asupra Teoremei celor patru patrate, cercetarile sunt inca vii, prin incercarile de a se redemonstra teorema utilizand alte metode, decat cea a lui Lagrange. In fine, dupa Conferinta de la Graz, din 2003, cand am realizat ca teorema noastra ar putea fi verificata si printr-o alta teorie, am decis sa acord acestui capitol o atentie majora.

3-1- Identitatea Bratu-

“Teorema celor trei patrate distincte” rezulta in mod natural din functia denumita de noi “combinare patratica”, functie care, la randu-i, este o consecinta a Identitatii Bratu si a Lemei Bratu.

In Memoriul catre Academia Romana (1983) am formulat identitatea sub o forma generala, coeficientii **b** si **c** fiind numere intregi oarecari, pentru a prezenta solutia ecuatiei propuse de Euler:

$$\mathbf{x^2 + by^2 + cz^2 = w^2} \qquad (7)$$

In lucrarea ulterioara [4], am particularizat si completat rezultatele, considerand **b=c=1**, pentru a formula “Teorema celor trei patrate distincte”.

Pentru a nu simplifica, dar nici nu a complica intelegerea, alegem calea de mijloc [6], cu referire la ecuatia:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + cz^2 = w^2} \qquad (7\text{-}1),$$

atat particularizarea, cat si generalizarea nefiind dificile.

Ne intoarcem la ecuatia ternara:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = z^2} \qquad (3),$$

Pentru solutiile reduse, am convenit ca **x** sa fie variabila impara si **y** variabila para.

Mai general, putem considera ecuatia ternara:

$$a\mathbf{x^2 + by^2 = z^2} \qquad (3\text{-}1).$$

Am gasit o identitate minunata, care asociaza solutiile ecuatiilor ternare (3-1), in particular cele ale ecuatiei pitagoreice (3), cu cele ale ecuatiilor cuaternare (7), in particular cu cele ale ecuatiei (9).

Am renuntat, insa, la conditia restrictiva a solutiilor reduse **(x,y,z)=1** , care parea imuabila, activand sistemul complet de solutii, notat prin $\mathbf{F_2}$'

Daca $\mathbf{S'_1= (x'_1, y'_1, z'_1)}$ si $\mathbf{S'_2= (x'_2, y'_2, z'_2)}$ sunt doua solutii oarecare din multimea $\mathbf{F_2'}$, care provin din solutiile reduse $\mathbf{S_1}$ si $\mathbf{S_2}$, prin amplificarea cu factorii numere naturale **h** si **l** , si pentru care putem presupune ca **(h,l)=1**:

$\mathbf{S'_1= h\, S_1}$ si

$\mathbf{S'_2 = l\, S_2}$, atunci exista urmatoarele identitati:

Identitatile IB

a1/ *Expresia* $\mathbf{2\,(z'_1.z'_2 \square x'_1.\, x'_2 \square y'_1.y'_2) = Z^2}$ *este un patrat de numar intreg* **Z**

b1/ *Numerele intregi* $\mathbf{X= x_1 \square x_2}$ *;* $\mathbf{Y= y_1 \square y_2}$ *;* $\mathbf{W= z_1 \square z_2}$ *; si* **Z,** *determinat prin relatia* (a1)*, sunt solutii reduse ale ecuatiei cuaternare:*

$$\mathbf{X^2 + Y^2 \square cZ^2 = W^2} \qquad (24\text{-}1),$$

unde **c** *este numar natural* **c= h l***, iar semnul lui* **c** *este acelasi cu semnul din suma algebrica* $\mathbf{z_1 \square z_2}$ *;*

si, analog, exista inca alte “identitati surori”:

a2/ *Expresia* $(\mathbf{z'_1 . z'_2 \square x'_1 . y'_2 \square y'_1 . x'_2) = Z_1^2}$
este un patrat de numar intreg $\mathbf{Z_1}$
b2/ *Numerele intregi* $\mathbf{X_1 = x_1 \square y_2}$; $\mathbf{Y_1 = y_1 \square x_2}$; $\mathbf{W_1 = z_1 \square z_2}$ *si* $\mathbf{Z_1}$ *, determinat prin relatia* (a2)*, sunt, de asemeni, solutii reduse ale ecuatiei cuaternare:*

$$\mathbf{X_1^2 + Y_1^2 \square 2cZ_1^2 = W_1^2} \qquad (24\text{-}2),$$

unde **c** *este numar natural* **c= h l,** *iar semnul lui* **c** *este acelasi cu semnul din suma algebrica* $\mathbf{z_1 \square z_2}$

Verificarea identitatilor a1, b1, a2, b2 se face prin scrierea parametrica a solutiilor reduse ale ecuatiei ternare omogene (3):

$$x = p^2 - q^2 \ ; \ z = p^2 + q^2 \ ; \ y = 2pq \qquad (4\text{-}1)$$

Am demonstrat [4], plecand de la identitatea **IB,** urmatoarea Lema:

Lema Bratu – *Din oricare doua solutii din sistemul complet de solutii ale ecuatiei ternare omogene* (3) *se pot genera cate patru solutii- care pot fi si egale cate doua - pentru fiecare din cele patru ecuatii cuaternare* (24)*. Cele patru ecuatii le-am denumit* ***” ecuatii gemene”****. Reciproca este de asemeni adevarata.*

Observatie 5 – Daca vom scrie identitatea Bratu pentru cazul ecuatiei ternare omogene (3), vom obtine cunoscuta identitate pitagoreica (4-1)

Pentru generarea solutiilor ecuatiilor cuaternare (24) se utilizeaza functia, pe care am denumit-o "combinare patratica".

3.2- Combinarea patratica

Definitie 2- *Combinarea patratica este o functie numerica, notata* **[4]**, *sau* CP [7]*, care asociaza la fiecare doua solutii din sistemul complet de solutii al ecuatiei patratice ternare omogene* E_2^2 *, cate patru solutii pentru fiecare din cele patru ecuatii patratice cuaternare, denumite " ecuatii gemene", definite prin relatiile* (24) *si considerand* c=1*:*

$$\mathbf{X^2 + Y^2 + Z^2 = W^2} \quad (25)$$

$$X^2 + \mathbf{Y^2 - Z^2 = W^2} \quad (26)$$

$$\mathbf{X^2 + Y^2 + 2\,Z^2 = W^2} \quad (27)$$

$$\mathbf{X^2 + Y^2 - 2\,Z^2 = W^2} \quad (28)$$

Definitie 3-*Am denumit primele forme de combinare, exprimate prin relatiile* a1, b1, *"combinare patratica directa, pozitiva si negativa", iar celelalte forme, exprimate prin relatiile* a2, b2, *le- am denumit "combinare patratica inversa, pozitiva si negativa".*

Exemplul- e1- Din solutiile **(3, 4. 5)** si **(4,0,4)**, din sistemul complet de solutii al ecuatiei $\mathbf{E_2^2}$ – ecuatia ternara patratica – prin combinarea patratica directa pozitiva, se obtin patru solutii ale ecuatiei cuaternare patratice omogene (25), dintre care, fiindca am ales $\mathbf{y_2=0}$, doua cate doua sunt egale:
(3,4,5) CP (4,0,4) = (7,4,4,9) & (1,4,8,9)

Exemplul- e2- Din solutiile **(5,12,13**) si **(4,0,4)**, din sistemul complet de solutii al ecuatiei $\mathbf{E_2^2}$ – ecuatia ternara patratica – prin combinarea patratica directa negativa, se obtin patru solutii ale ecuatiei cuaternare patratice omogene (26), dintre care, fiindca am ales $\mathbf{y_2=0}$, doua cate doua sunt egale:
(5,12,13) CP (4,0,4) = (3,4,3,4) & (1,12,9,8)

Exemplul- e3- Din solutiile **(3,4,5)** si **(5,12,13)**, din sistemul complet de solutii al ecuatiei $\mathbf{E_2^2}$ – ecuatia ternara patratica – prin combinarea patratica inversa pozitiva – se obtin patru solutii ale ecuatiei cuaternare patratice omogene (27):
(3,4,5) CP (5,12,13) = (9,9,9/9,18) & (15,9,3/3,18) & (15,1,7/7,18) & (9,1/11/11,18)

Exemplul- e4- Din solutiile **(3,4,5)** si **(2,0,2)**, din sistemul complet de solutii al ecuatiei $\mathbf{E_2^2}$ – ecuatia ternara patratica – prin combinarea patratica inversa negativa,

se obtin patru solutii ale ecuatiei cuaternare patratice omogene (28), dintre care, fiindca am ales $\mathbf{y_2 = 0}$, doua cate doua sunt egale:
(3,4,5) CP (2,0,2) = (5,4,4/4,3) & (1,4,2/2,3)

Se observa ca am notat valoarea variabilei **Z**, care intervine in ecuatie avand coeficientul **2**, prin **Z/Z**.

In sistemul complet de solutii $\mathbf{F'_2}$, al ecuatiei pitagoreice, distingem cateva submultimi de solutii, care sunt utilizabile in combinarea patratica:
$A_1 = F_2$ - submultimea solutiilor reduse; $A_2 = 2^k\ F_2$
$A_3 = \{ (x,y,z) ; y=0 \}$- submultimea solutiilor in care variabila y este nula; fiindca intervin destul de des in teorie, le-am denumit "solutii cu defect", din care separam trei categorii de submultimi:
$A_{3,1} = \{ (x,y,z) ; y=0; x= n^2 ; n \text{ impar}\}$;
$A_{3,2} = \{ (x,y,z) ; y=0; x= n^2 ; n \text{ par}\}$;
$A_{3,3} = \{ (x,y,z) ; y=0; x= 2n^2 \}$;

Observatie 6- Este esentiala conventia de paritate a variabilelor **x** si **y**, din solutia redusa **(x,y,z)**, unde am considerat variabila **x** impara si **y** para. Pentru o solutie **(2x, 2y, 2z)**, in combinarea patratica, **2x** va avea rolul variabilei pare, iar **2y**, rolul variabilei impare.

3.3- Solutia generala a ecuatiei Euler

Consideram ecuatia:

$$\mathbf{x^2 + by^2 + cz^2 = w^2} \qquad (7)$$

Pentru **b** si **c**, numere naturale prime, formulele cu patru parametrii, care rezulta din teoria noastra sunt:

$$w = p^2 + bq^2 + bcu^2 + cv^2 \;;\; y = 2pq + 2cuv \;;$$
$$x = p^2 - bq^2 + bcu^2 - cv^2) \;;\quad z = 2pv - 2bqu \qquad (29)$$

unde **p, q** si **u, v** sunt intregi rationali, care pot fi permutati.

Analog se trateaza ecuatia $\mathbf{ax^2 + by^2 + z^2 = w^2}$ (7-1), cu observatia ca, pentru **x** impar, vom opera cu variabilele **2x, 2y, 2z, 2w**.

Observatie 7- Solutia propusa de Euler (8) si reluata de Carmichael si de Mordel [3], este un caz particular al solutiei generale (29), in care **u=0**.

Daca b si **c** nu sunt numere prime, formulele sunt mai complicate si le prezentam pentru cazul propus in **Identitatea IB,** de mai sus,: **b=1** si **c= h l** :

$$w = h(p^2 + q^2) + l(u^2 + v^2) \;;\; y = 2pq + 2luv \;;$$
$$x = h(p^2 - q^2) + l(u^2 - v^2) \;;\; z = 2pv - 2qu \qquad (30)$$

3.3.1- Aplicatii ale solutiei generale a ecuatiei Euler:

Nu este subiectul anume al prezentei lucrari, totusi, aratam ca in (6) am demonstrat urmatoarea propozitie, care se deduce din teoria noastra:

Propozitia 20- *Daca avem o solutie nebanala pentru cel putin una dintre ecuatiile:*

$s^4 + t^4 \square u^4 = v^2$ si $a^4 + b^4 \square c^4 = 2d^2$ (11-1),

putem deduce o solutie nebanala pentru ecuatia (11):

$\mathbf{x^4 + y^4 + z^4} = w^2$

iar, daca gasim o solutie, putem dezvolta o infinitate de solutii.

3.4- Solutiile cu patru parametri ale ecuatiilor gemene

Prezentam in continuare solutiile cu patru parametri pentru ecuatiile gemene, obtinute prin combinarea patratica.

3.4.1- Ecuatia $X^2 + Y^2 + Z^2 = W^2$ (25)

Ecuatia are un rol important in reprezentarea numerelor prin sume de patrate. Am notat ecuatia (9) prin $\mathbf{E_3^2}$ si am studiat-o mai sus prin metoda generarii solutiilor rationale. Solutiile acestei ecuatii au fost descoperite si demonstrate de Carmichael in 1915 [2], intr-o celebra lucrare si utilizand teoria intregilor lui Gauss.

Prin noile noastre concepte, regasim aceleasi relatii (10) pentru ecuatia renotata (25), printr-o metoda aritmetica, fara utilizarea numerelor complexe.

Solutiile, functie de patru parametri, ale ecuatiei (25) se obtin prin particularizarea relatiilor (24-1), considerand **c=1**, si prin combinarea patratica directa pozitiva a solutiilor parametrice ale ecuatiei ternare patratice (3):

$$x = m^2 - n^2 ; \quad y = 2mn \quad ; \quad z = m^2 + n^2 \quad ,$$

o solutie $\mathbf{S_1}$ fiind exprimata prin parametrii **p,q** si cealalta $\mathbf{S_2}$ prin parametrii **u,v.**

Regasim sub o forma mai precisa solutiile (10) cu patru parametri ale ecuatiei (25):

$W = (p^2 + q^2) + (u^2 + v^2) ;\ \ Y = 2pq \square\square 2uv ;$ (30-1)

$X = (p^2 - q^2) \square\square (u^2 - v^2) ;\ \ Z = 2pv \square 2qu$

Regula semnelor a fost enuntata mai sus, pentru combinarea patratica.

Propozitia urmatoare a fost demonstrata initial de Carmichael [2], prin teoria noastra am redescoperit-o:

Propozitia 21- *Daca ecuatia* (25)*:*

$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 = w^2}$ *are solutii in numere intregi* **x,y,z***, pentru orice* **w** *numar natural, atunci si ecuatia* (L)*:*

$\mathbf{w = p^2 + q^2 + u^2 + v^2}$ *are, pentru orice* **w** *natural, solutii in numere intregi* **p,q,u,v***; si reciproc.*

3.4.2- Ecuatia $X^2 + Y^2 - Z^2 = W^2$ (26)

Solutiile acestei ecuatii erau cunoscute inca de Euler- gasite, insa, printr-o alta metoda- dar legatura cu celelalte trei ecuatii gemene a aparut abia acum.

Prin combinarea patratica directa negativa a doua solutii ale ecuatiei ternare patratice (3), o solutie $\mathbf{S_1}$ fiind exprimata prin parametrii **p si q** si cealalta $\mathbf{S_2}$ prin parametrii **u si v**, obtinem solutiile cu patru parametri ale ecuatiei (26):

$W = (p^2+q^2) - (u^2+v^2) ;\ \ \ Y = 2pq \square\square 2uv;$ (31)

$X = (p^2 - q^2) \square\square (u^2 - v^2)$; $Z = 2pu \square 2qv$
cu aceeasi atentionare privind asocierea semnelor ca la ecuatia (25).

Analog propozitiei (20), am demonstrat:
Propozitia 22 *Daca ecuatia* (26): $\mathbf{x^2 + y^2 - z^2 = w^2}$ *,*
are solutii in numere intregi **x,y,z***, pentru orice* **w** *numar natural, atunci si ecuatia:* $\mathbf{w = p^2 + q^2 - u^2 - v^2}$
are, pentru orice **w** *natural, solutii in numere intregi* **p,q,u,v***; si reciproc.*

3.4.3- Ecuatia $\mathbf{X^2 + Y^2 + 2Z^2 = W^2}$ (27)
Solutiile acestei ecuatii apar pentru prima oara in literatura, inclusiv legatura cu celelate ecuatii gemene.
Prin combinarea patratica inversa pozitiva a doua solutii ale ecuatiei ternare patratice (3), o solutie $\mathbf{S_1}$ fiind exprimata prin parametrii **p si q** si cealalta $\mathbf{S_2}$ prin parametrii **u si v**, obtinem:

$W = (p^2+q^2) + (u^2 + v^2)$; $Y = 2pq \square\square (u^2-v^2)$; (32),
$X = (p^2 - q^2) \square\square 2uv$; $Z = q(u+v) \square p(u-v)$

in care regula semnelor a fost enuntata mai sus, pentru combinarea patratica.

Observatie 8- Observam ca, pentru aceasta ecuatie (27), sunt solutii reduse si acelea in care variabilele **X, Y si Z** sunt impare, iar variabila **W** este para. Din identitatea:

$(X - Y + 2Z)^2 + (X - Y - 2Z)^2 + 2(X+Y)^2 = (2W)^2$ (32-1),
vom obtine alte solutii cu patru parametri, cu variabila **W** para.
De asemeni, prin -**Observatia 4** - de mai sus, se deduc relatii echivalente pentru formulele (32), simetrice solutiilor ecuatiei gemene (25):

$$W = (p^2 + q^2) + 2(u^2 + v^2)\ ; \quad Y = 2pq \square\square 4uv\ ; \qquad (32\text{-}2).$$
$$X = (p^2 - q^2) \square\square 2(u^2 - v^2)\ ; \quad Z = 2pv \square\ 2qu$$

Analog propozitiilor (20) si (21), am demonstrat:
Propozitia 23- *Daca ecuatia* (27) $\mathbf{x^2 + y^2 + 2z^2 = w^2}$ *are solutii in numere intregi* **x,y,z**, *pentru orice* **w** *numar natural, atunci si ecuatia:* $\mathbf{w = p^2 + q^2 + 2(u^2 + v^2)}$ *are, pentru orice* **w** *natural, solutii in numere intregi* **p,q,u,v**; *si reciproc.*

3.4.4- Ecuatia $X^2 + Y^2 - 2Z^2 = W^2$ (28)

Ca si pentru ecuatia (27), solutiile acestei ecuatii apar pentru prima oara in literatura, inclusiv legatura cu celelate ecuatii gemene.
Prin combinarea patratica inversa negativa a doua solutii ale ecuatiei ternare patratice (3), o solutie $\mathbf{S_1}$ fiind exprimata prin parametrii **p si q** si cealalta $\mathbf{S_2}$ prin parametrii **u si v**, obtinem:

$$W = (p^2+q^2) - (u^2 + v^2)\ ; \quad Y = 2pq \square (u^2 - v^2)\ ; \qquad (33),$$
$$X = (p^2 - q^2) \square\square 2uv\ ; \quad Z = q(u+v) \square\ p(u-v)$$

Observatie 9- Daca **(X,Y,Z,W)** este o solutie a ecuatiei (28), atunci si **(X+Y, X-Y, W, 2Z)** este de asemeni o solutie.
Variabilele pot fi **X,W** impare si **Y,Z** pare, dar si **X,Y,Z** impare, iar **W** para.
Analog relatiilor (32-2), avem solutii de forma:

$W = (p^2 + q^2) - 2(u^2 + v^2)$; $Y = 2pq \;\square\; 4uv$; (33-2).
$X = (p^2 - q^2) \;\square\; 2(u^2 - v^2)$; $Z = 2pu \;\square\; 2qv$

Asemanator propozitiilor (20), (21) si (22), am demonstrat:
Propozitia 24- *Daca ecuatia* (28) $\mathbf{x^2 + y^2 - 2z^2 = w^2}$ *are solutii in numere intregi* **x,y,z**, *pentru orice* **w** *numar natural, atunci si ecuatia:* $\mathbf{w = p^2 + q^2 - 2(u^2 + v^2)}$ *are, pentru orice* **w** *natural, solutii in numere intregi* **p,q,u,v**; *si reciproc.*

3.5- Teorema celor Patru Patrate a lui Lagrange- Completarea enuntului.

Din coroborarea propozitiilor de la cap. 1.6, cu rezultatele de la cap 2.5 si prin propozitiile (20), (21), (22) si (23) de la acest capitol, formulam urmatoarele teoreme de reprezentare a numerelor prin sume algebrice de patru patrate:

Propozitia 25 - *Orice patrat de numar natural* **W** *poate fi reprezentat ca suma algebrica de trei patrate de numere intregi, in urmatoarele patru forme:*

$$\mathbf{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = W^2;\ \ X_2^2 + Y_2^2 + 2Z_2^2 = W^2;} \quad (34)$$
$$\mathbf{X_3^2 + Y_3^2 - Z_3^2 = W^2;\ \ X_4^2 + Y_4^2 - 2Z_4^2 = W^2}$$

Aceste patru forme de reprezentare ale numarului natural **W** sunt tocmai formele patratice, ale caror solutii au fost studiate mai sus, ca ecuatii gemene.

Propozitia 26-Completarea Teoremei Lagrange- F1-
Orice numar natural **w** *poate fi reprezentat ca suma algebrica de patru patrate de numere intregi, in urmatoarele patru forme:*

$$p_1^2 + q_1^2 + \ \ (u_1^2 + v_1^2) = w;$$
$$p_2^2 + q_2^2 + 2(u_2^2 + v_2^2) = w; \qquad (35\text{-}1)$$
$$p_3^2 + q_3^2 - \ \ (u_3^2 + v_3^2) = w;$$
$$p_4^2 + q_4^2 - 2(u_4^2 + v_4^2) = w \qquad (35\text{-}2)$$

Aceasta este o expresie completata a Teoremei celor patru patrate a lui Lagrange.

Observatie 9- Datorita existentei Propozitiei 4- cap 1.6- privind reprezentarea numerelor prime prin diferenta a doua patrate, sunt interesante numai primele doua forme de reprezentare
In toate lucrarile anterioare {[3]- [9]}, am enuntat teoremele de mai sus, rezumandu-ne la primele ecuatii de mai sus, respectiv am completat Teorema celor Patru Patrate a lui Lagrange, sub forma sumei aritmetice a patru patrate (35-1)

Propozitia 27- Completarea Teoremei Lagrange-F2-
Orice numar natural **w** *poate fi reprezentat ca suma aritmetica de patru patrate de numere intregi, in urmatoarele doua forme:*

$p_1^2 + q_1^2 \ + \ (u_1^2 + v_1^2) = w$;
$p_2^2 + q_2^2 \ + 2\,(u_2^2 + v_2^2) = w$; (35-1)

Remarcabila, prin consecintele ei, este urmatoarea observatie, din care se poate deduce **propozitia 26**:

Observatie 10- *Fiindca s-a demonstrat ca numerele prime impare de forma* **8k+1** *si* **8k+5** *se reprezinta ca suma a doua patrate, fiindca la fel se reprezinta si produsele intre asemenea numere, ca si produsele acestor numere prin* $\mathbf{2^k}$*, atunci numerele de forma* **8h+3** *si* **8h+7***, obtinute prin combinarea patratica pozitiva:*

8k+1+2(8j+1) = 8h+3; 8k+5 + 2(8j+1) = 8h+7;
8k+1+2(8j+5) = 8h+3; 8k+5 + 2(8j+5) = 8h+7:
(35-3); *se reprezinta ca suma a patru patrate.*
Analog pentru relatia geamana, a numerelor **8k+1** *si* **8k+3**
.

Relatiile (35-3) probeaza completarea propusa de noi a Teoremei celor patru patrate a lui Lagrange.

3.6- Solutiile cu trei parametri ale ecuatiilor gemene

Reluam observatia 5 din cap 3.2- Combinarea patratica- unde am definit submultimea solutiilor cu defect:
A_3 = { (x,y,z) ; y=0 si x □0}- submultimea solutiilor in care variabila y este nula, denumite “solutii cu defect”, in care am distins trei categorii de submultimi:
$A_{3,1}$ = { (x,y,z) ; y=0; x= n^2 ; n impar} ;
$A_{3,2}$ = { (x,y,z) ; y=0; x= n^2 ; n par} ;
$A_{3,3}$ = { (x,y,z) ; y=0; x= $2n^2$ }

Este evident ca avem **x □0, y=0**, unde **y= 2uv**, daca si numai daca **v=0** si **u □0**.
Combinarea patratica se aplica intre o solutie
S_1 □ [$p^2 + q^2$; p^2-q^2; 2pq] si o alta solutie **S2** din submultimea **A_3** , definita ca mai sus.

Am demonstrat [3] urmatoarea
Propozitia 28- *Sunt solutii ale ecuatiilor gemene, urmatoarele expresii cu trei parametri, deduse pentru fiecare dintre cele patru ecuatii:*

1- Ecuatia (25): $X^2 + Y^2 + Z^2 = W^2$
Pentru orice **W** numar natural, cu exceptia
W = 2^{2k} (8 l + 7), avem solutiile:
$W_1 = p^2 + q^2 + u^2$; $Y_1 = 2pq$; (36-1)
$X_1 = p^2 - q^2$ □□u^2 ; $Z_1 = 2qu$, sau $Z_1 = 2pu$,
Pentru orice **W** numar natural, cu exceptia
W = 2^{2k+1} (8 l + 7), avem, de asemeni, solutiile:
$W_2 = p^2 + q^2 + 2u^2$; $Y_2 = 2pq$ □□$2u^2$; (36-2)

$X_2 = p^2 - q^2$; $Z_2 = 2pu \square 2qu$.

2-Ecuatia (26): $X^2 + Y^2 - Z^2 = W^2$

Pentru orice W numar natural, avem doua forme de solutii:

$W_1 = p^2 + q^2 - u^2$; $Y_1 = 2pq$; (37-1),

$X_1 = p^2 - q^2 \square\square u^2$; $Z_1 = 2pu$, sau $Z_1 = 2qu$,

precum si

$W_2 = p^2 + q^2 - 2u^2$; $Y_2 = 2pq \square\square 2u^2$; (37-2)

$X_2 = p^2 - q^2$; $Z_2 = 2pu \square 2qu$.

3-Ecuatia (27): $X^2 + Y^2 + 2Z^2 = W^2$

Pentru orice W numar natural, avem doua forme de solutii:

$W_1 = p^2 + q^2 + 2u^2$; $Y_1 = 2pq$; (38-1),

$X_1 = p^2 - q^2 \square 2u^2$; $Z_1 = 2qu$, sau $Z_1 = 2pu$,

precum si

$W_2 = p^2 + q^2 + u^2$; $Y_2 = 2pq \square\square u^2$; (38-2)

$X_2 = p^2 - q^2$; $Z_2 = pu \square qu$.

4-Ecuatia (28): $X^2 + Y^2 - 2Z^2 = W^2$

Pentru orice W numar natural, avem doua forme de solutii:

$W_1 = p^2 + q^2 - 2u^2$; $Y_1 = 2pq$; (39-1),

$X_1 = p^2 - q^2 \square 2u^2$; $Z_1 = 2pu$, sau $Z_1 = 2qu$,

precum si

$W_2 = p^2 + q^2 - u^2$; $Y_2 = 2pq \square\square u^2$; (39- 2)

$X_2 = p^2 - q^2$; $Z_2 = pu \square qu$.

3.7- Teorema celor Trei Patrate Distincte- Bratu

3.7.1- Preliminarii - Din considerentele de mai sus, referitoare la solutiile ecuatiilor gemene cu trei parametri, deducem:

Propozitia 29- Completarea Teoremei Legendre-F1- *Orice numar natural* **w***, cu exceptia numerelor de forma* $\mathbf{2^k (8\, l + 7)}$, *poate fi reprezentat ca suma algebrica de trei patrate de numere intregi, in urmatoarele patru forme:*

$$W= p^2 + q^2 + u^2 \qquad (40\text{-}1)$$
$$W= p^2 + q^2 + 2u^2 \qquad (40\text{-}2)$$
$$W= p^2 + q^2 - u^2 \qquad (40\text{-}3)$$
$$W= p^2 + q^2 - 2u^2 \qquad (40\text{-}4)$$

Numerele de forma $\mathbf{2^{2k+1} (8\, l + 7)}$ *se pot reprezenta numai prin expresiile* (1), (3) *si* (4)*, iar numerele de forma* $2^{2k} (8\, l + 7)$ *se pot reprezenta numai prin expresiile* (2), (3) *si* (4) *de mai sus.*

Observatie 11- In lucrarea [7] am extins aceasta reprezentare si la formele in care patratul $\mathbf{q^2}$ este scris cu semnul “-“, adica pentru, in total, opt forme de reprezentare prin sume algebrice de patrate, dar aceasta completare este facila.

Observatie 12 – De asemeni, conform **Observatiei 9** – de mai sus - sunt interesante numai primele doua forme de reprezentare, (40-1) si (40-2).

Observatie 13 – *Fiindca patratele numerelor naturale impare sunt numai de forma* 8k+1, *din* **Observatia 10** *si prin relatiile* (40) *este probata* **Propozitia 28**.

Observatie 14- Subliniem ca evident, dar foarte important, ca toate completarile de enunturi de mai sus, precum si enuntul Teoremei celor Trei Patrate Distincte, au devenit posibile numai dupa descoperirea ecuatiilor gemene si a solutiilor generale ale acestor ecuatii.

Asa dar, se poate enunta Teorema celor trei patrate distincte.

3.7.2 – Teorema celor trei patrate distincte, referitoare la reprezentarea numerelor naturale prin sume de patrate, am enuntat-o in lucrarile anterioare {[4] ÷ [9]} astfel:

Teorema celor Trei Patrate Distincte -Bratu-
Fiecare numar natural se poate reprezenta prin suma a trei patrate si/sau suma a a trei patrate, din care unul este duplicat. Numerele de forma 2^{2k} (8 l + 7) admit numai o reprezentare de cel de al doilea tip, numerele de forma 2^{2k+1} (81 + 7) admit numai o reprezentare de primul tip, in timp ce toate celelate numere, cu exceptia celor doua forme, admit ambele tipuri de reprezentare.
Relational, pentru fiecare numar natural **w**, exista cel putin trei numere intregi **(x_1, y_1, z_1)** si/sau alte trei numere intregi **(x_2, y_2, z_2)**, astfel incat sa avem reprezentarile prin sume de patrate:

$$w = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad (\alpha)$$
$$w = x_2^2 + y_2^2 + 2z_2^2 \quad (\beta) \qquad (40)$$

Pentru $w=w_1= 2^{2k+1}$ (81+7), avem numai reprezentarea (α), pentru $w=w_2= 2^{2k}$ (8l + 7), avem numai reprezentarea (β), si pentru $w \neq w_1$ si $w \neq w_2$, avem, in acelasi timp, reprezentarile (α) and (β).

Exemple: $w = 15$, avem $w = 3^2 + 2^2 + 2 \,.\, 1^2$ (β)
$w = 30$, avem $w = 5^2 + 2^2 + 1^2$ (α)
$w = 21$, avem $w = 4^2 + 2^2 + 1^2$ (α)
si $w = 3^2 + 2^2 + 2.\ 2^2$ (β).

Pentru determinarea reprezentarii concrete a oricarui numar natural **w**, urmeaza sa demonstram o propozitie, pe care o enuntam drept conjectura:

3.7.3- Conjectura 3- *Pentru determinarea concreta a reprezentarii unui numar natural oarecare* w *prin suma de trei patrate distincte, este suficient sa cunoastem reprezentarea prin sume de patrate a celor trei numere precedente:* w-1, w-2. w-4 .

3.7.3 – Propozitii de reprezentare a numerelor prime prin sume de patrate

Suntem in masura sa propunem completarea propozitiilor de reprezentare a numerelor prin sume de patrate, prezentate la cap 1-6, prin urmatoarele propozitii:

P11- *Oricare numar prim impar* ***w,*** *care nu este de forma* ***8k****+7, este reprezentabil atat sub forma* $x_1^2+y_1^2+z_1^2$ *, cat si sub forma* $x_2^2+y_2^2+2z_2^2$ *;*

P12- *Oricare numar prim impar* ***w,*** *de forma* ***8k****+7, este reprezentabil sub forma* $x_2^2+y_2^2+2z_2^2$ *si nu este reprezentabil sub forma* $x_1^2+y_1^2+z_1^2$ *;*

Pentru numerele prime, cel mai mic numar al patratelor distincte in reprezentarea prin sume aritmetice de patrate este **g(2)= 2**, cu singura exceptie Legendre, la care **g(2)=3. A**m aratat:

Propozitia 30- Reprezentarea numerelor prime-

Numerele prime se reprezinta prin sume aritmetice de patrate de astfel:
Oricare numar prim impar $\boldsymbol{w = 8k+1}$ *este reprezentabil sub forma sumei a doua patrate* $\boldsymbol{x_1^2 + y_1^2}$ *in mod unic si, deasemeni, sub forma sumei a doua patrate cu unul dedublat* $\boldsymbol{x_2^2 + 2y_2^2}$ *tot in mod unic.*
Oricare numar prim impar $\boldsymbol{w = 8k+3}$ *este reprezentabil sub forma sumei a doua patrate cu unul dedublat* $\boldsymbol{x_2^2 + 2y_2^2}$ *in mod unic.*
Oricare numar prim impar $\boldsymbol{w = 8k+5}$ *este reprezentabil sub forma sumei a doua patrate* $\boldsymbol{x_1^2 + y_1^2}$ *in mod unic.*
Oricare numar prim impar $\boldsymbol{w = 8k+7}$ *este reprezentabil sub forma sumei de trei patrate cu unul dedublat*
$\boldsymbol{x_2^2 + y_2^2 + 2z_2^2}$ *; dar reprezentarea nu este unica.*

3.8- Alte conjecturi propuse

Speranta noastra ar fi ca recunoasterea lucrarilor de acum sa permita a publica ulterioara a solutiilor unor probleme, prezentate aici drept conjecturi. Iar daca, intre vreme, in alta parte si alti cercetatori vor gasi demonstratiile, utilizand metodele noastre, va fi prilej de bucurie si pentru a-i saluta.

3.8.1-Conjectura 4- *Determinarea unui sir infinit de numere prime, utilizand solutiile ecuatiilor gemene.*

Chiar prin utilizarea calculatoarelor, metoda propusa aici este una dintre cele mai rapide pentru determinarea unor numere prime oricat de mari, cat si pentru verificarea proprietatii unui numar de a fi prim sau neprim.

Una dinte cele mai frumoase aplicatii poate fi abordarea problemelor aditive, plecand de la:

Ipoteza lui Goldbach: *Oricare numar par este suma a doua numere prime impare,*

am formulat:

3.8.2-Conjectura 5 - *Ipoteza lui Goldbach poate fi demonstrata prin utilizarea noilor concepte si rezultate din prezenta lucrare.*

&&*&*

REFERIRI

1. DICKSON L. E. - *History of the Theory of Numbers*, Washington- 1920, Add. Washington Press
2. CARMICHAEL R.D. –*Diophantine Analisys,* New York-1915, John Wiley & Sons
3. MORDELL L. K. - *Diophantine Equations,* London-1969, Academic Press
4. BRATU I.N. - *Eseu asupra ecuatiilor diofantice*, Craiova-1994, Editura Adel
5. BRATU I.N. - *Note de analiza diofantica*, Craiova-1996, Ed .M. Dutescu
6. BRATU N.I.- *Diophantine equations* The first intenat. Conf. in Number Theory, Craiova- 1997, American Res. Press
7. BRATU N..I. and BRATU B.N.- *On the quaternary quadratic diophantine equations (1)* , New Delhi-2000, Bulletin of Pure and Applied Sciences, vol. 19E/ 2
8. BRATU I .N. and CRETAN N. A. – *A Generalization of Gauss Theorem on quadratic Forms,* New Delhi 2002, Bulletin of Pure and Applied Sciences, vol. 21E/1
9. BRATU I .N. and CRETAN N A. - *On the quaternary quadratic diophantine equations (2)* , University of New South Walles-2003, Mathematical Gazette (to appear)

10 BHARGAVA M. – *On the C.- S. Fifteen Theorem,* Graz- 2003, Conf. in Numbers Theory

****   Sfarsit Partea I-a   ****

PARTEA A II-A

ADDENDA DESPRE ULTIMA TEOREMA A LUI FERMAT

<u>**ADAOS LA PROLOG**</u>

Asa cum am anuntat in PROLOG-ul de la Partea I-a, vom prezenta rezumativ si schematizat continutul “Memoriului catre Academia Romana” din 1983, cu referire la Marea Teorema a lui Fermat. Dar vom publica, pentru prima oara, o noua lema, care constitue o completare a metodei aritmetice, propuse de noi in demonstrarea Ultimei Teoremei a lui Fermat. Daca metoda denumita “g.s.r.” ne-a permis trecerea de la corpul ciclotomic la cel patratic, prin lema demonstrata acum se poate trece la corpul rational, in care teorema fundamentala a aritmeticii are valabilitate.
Trebuie sa adaugam la “Istoria”de atunci marea reusita a lui Andrew Wiles, dupa 358.de ani de la enuntul lui Fermat. Se spune insa, si nu fara temei, ca intelegerea demonstratii lui Wiles asupra Ultimei Teoremei Fermat-dupa 10 ani de la publicarea demonstratiei- este proprie numai catorva sute dintre matematicienii lumii; ba mai mult, se aud deja voci, care contesta valabilitatea metodei de demonstrare. Tot asa, din istoria Marii Teoreme- dupa 350 de ani de esecuri- o demonstratie reusita, si tocmai prin mijloace elementare, cum se pronuntase Fermat insusi, ar aparea atat de surprinzatoare incat, pentru inceput, tot cateva sute de matematicieni ar avea sagacitatea si mai ales curajul de a accepta existenta si valabilitatea unei asemenea demonstratii. Astfel, sfaturile mai vechi ale colegilor romani, de a disjunge demonstratia in cateva segmente si de a amana decizia anuntului final dupa acceptarea fiecarei parti, ar putea fi justificate.
In lucrarea actuala, fata de Memoriul din 1983, vom renunta la prezentarea unei “teorii a divizibilitatii” si la incercarile de lamurire pe aceasta directie. Pentru a putea fi usor inteles, am renuntat chiar la tratarea algebrica in favoarea metodelor exclusiv elementare, operante in vremea lui Fermat si a lui Euler.
Reluarea prezentarii unor vechi rezultate, care au aparut greu, numai in parte si nu in tara mea, sau la care ecoul inca nu s-a-ntors, si completarea lor de acum izvorasc din amaraciunea adevarului, nu din orgoliu. In viata mea am rezolvat toate problemele de matematica elementara, care mi s-au propus, si nu am cunoscut esecul vreodata. Spun aceste lucruri, pentru a convinge ca nu as indrazni sa anunt noi propozitii, daca nu as avea o idée temeinica pentru demonstratie si o verificare fara tagada a rezultatelor; chiar daca, adesea, am lasat deoparte pasaje demonstrate de altii si mai de mult, sau, aparent, facil demonstrabile. In general, am cerut sfatul unor

matematicieni numai asupra importantei rezultatelor, sau pentru a verifica unele calcule de rutina; nu m-am indoit vreodata de valoarea de adevar a propozitiilor enuntate. De aceasta data, fiind dezgropate teoremele “zeilor”Euler, sau Legendre si ale altora, la care se propun completari sau modificari si fiindca exista, poate, fragmente, pe care eu le-am considerat sau banale, sau facile, in aparenta insa numai, la fel ca in toate lucrarile mele din ultimii 23 de ani, adaug rugamintea catre specialisti sa comenteze si sa dezvolte acele pasaje.
Asa dar, am incalcat inca un comandament - in afara sfatului colegial de a limita lucrarea la o singura noutate- scuza mea fiind, asa cum am mai spus: “fugit irreparabile tempus”….

Martie 2006
Autorul

Cap.1- ISTORIE-

Povestea Marii Teoreme a lui Fermat se confunda in buna masura cu insasi istoria matematicii. Intre Pierre de Fermat si Andrew Wiles, vreme de 358 de ani, toti marii matematicieni si-au legat numele de incercarea rezolvarii acestei fermecatoare provocari pentru mintea umana.
Pe cand studia tripletii pitagoreici, in anul 1637, pe marginea unei pagini a Aritmeticii lui Diofant, Fermat a notat mai intai enuntul Marii Teoreme, iar, pe o alta margine, a insemnat un remarcabil comentariu:
"Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detex hanc marginis exiguitas non caperet"

1.1- Enuntul Ultimei Teoreme- Ultima Teorema a lui Fermat are un enunt uluitor prin simplitate:
Ecuatia $\mathbf{x^n + y^n = z^n}$ (1)
nu are solutii **(x,y,z)** *in numere naturale, pentru* n>2.
Daca ecuatia diofantica (1) a fost numita *"ecuatia lui Fermat"*, iar solutiile ei au fost numite *"tripleti fermatieni"*, atunci enuntul se simplifica mai mult:

Intre numerele intregi nenule nu exista niciun triplet fermatian.

1.2- Demonstratii pentru diversi exponenti- Pentru exponentul n=4, o demonstratie a fost gasita intre hartiile lui Fermat, care a descoperit si utilizat *“principiul coborarii infinite”*. Pentru exponentul n=3, teorema a fost demonstrata prima oara de Euler in anul 1768, care a utilizat acelasi procedeu al “coborarii infinite”. Findca Euler a presupus, fara demonstratie, ca in inelul *D3*, al intregilor algebrici care sunt de forma $(p + q\sqrt{-3})$, descompunerea in factori primi este unica, demonstratia a fost completata ulterior.

Toate demonstratiile de mai tarziu, pentru diversi exponenti **n**, se bazeaza pe dezvoltarea si pe generalizarea ideilor lui Euler. Dar nici metodele algebrice, nici cele ale geometriei algebrice nu s-au aratat eficiente in gasirea unei demonstratii generale a Teoremei lui Fermat; conjectura lui Fermat a rezistat 350 de ani. In anul 1955, cercetatorul japonez Taniyama a enuntat in teoria formelor modulare o conjectura, care va deveni celelebra. Celebritatea conjecturii a aparut cand s-au acumulat dovezi suficiente, ca exista o legatura intre formele modulare si ecuatiile eliptice si s-a nascut speranta demonstratiei, ca toate ecuatiile eliptice sunt modulare. Ulterior, in 1984, un mare matematician, germanul Gerhard Frey, a gasit veriga lipsa pentru a ajunge la Ultima Teorema a lui Fermat. In sfarsit, in 1995, englezul Andrew Wiles a reusit demonstrarea conjecturii Taniyama si a pus punctul final in istoria acestei enigme. Sfidarea mintii umane a fost, in sfarsit, invinsa. Si nu ar mai fi necesar vreun comentariu.
Totusi, pe de-o-parte, geniul matematic Paul Fermat a afirmat ca *“a gasit o demonstratie minunata”* a afirmatiei sale, pe care marginea unei pagini *“nu o poate cuprinde”*, pe atunci, mijloacele la indemana sa fiind exclusiv ale teoriei elementare a numerelor, iar, pe de-alta-parte, conexiunea intre domenii distante ale matematicii este o dificultate majora in intelegerea demonstratiei lui Wiles, deja contestata de unii cercetatori. De aceea, au existat mereu sperante, ca va fi gasita o demonstratie a Marii Teoreme, utilizand metode din teoria elementara a numerelor.

1.3- Consideratii privind relatia intre logica si teoria numerelor.

Acest capitol este complementar in demonstratie. Daca am renuntat la “teoria divizorilor”, intelegem sa pastram si sa actualizam aceasta observatie metamatematica, iar motivatia este generala pentru orice demonstratie propusa.
1.3.1- Bazele logicii au fost puse de Aristotel din Stagira (384-322 i.e.n.). Principiile logicii traditionale: *identitatea, necontradictia* si *tertiul exclus* sunt valabile in teoria numerelor. Piesa centrala a logicii aristotelice este considerata *teoria silogismului.*
1.3.2- Cum a reusit sa demonstreze Wiles Ultima Teorema Fermat? Secventa propozitiilor din demonstratia lui Wiles, de la premisa la concluzie, este urmatoarea:
/1/ Presupunem ca Ultima Teorema alui Fermat este falsa, adica ecuatia lui Fermat are solutie pentru $p > 2$;
/2/ Frey a demonstrat ca daca este adevarata premisa /1/, atunci ecuatia lui Fermat poate fi transformata intr-o ecuatie eliptica;
/3/ Tot Frey a demonstrat ca, daca este adevarata si premisa /2/, ecuatia eliptica obtinuta nu este modulara;
/4/ Conjectura lui Taniyama sustine ca orice ecuatie eliptica este modulara;
/5/ Wiles a demonstrat conjectura lui Taniyama;
/6/ Deruland argumentatia in sens invers, fiind negati termenii medii din silogism, rezulta ca ecuatia lui Fermat

nu are solutie, deci este adevarata Ultima Teorema a lui Fermat
Este evident ca, in argumentatia de mai sus, este utilizata o singura proprietate a ecuatiei Fermat- de a fi eliptica- daca Ultima Teorema ar fi falsa. Dar, tot la fel de evident este ca, in aceeasi ipoteza, ecuatia poate avea diverse proprietati, adica proprietatea /2/ nu este unica.
1.3.3- Cum a demonstrat Legendre Ultima Teorema in cazul exponentului 5?
A utilizat o alta proprietate a ecuatiei Fermat.
/1/ Presupunem ca Ultima Teorema alui Fermat este falsa, adica ecuatia lui Fermat are solutie pentru p=5;
/2/ Daca este adevarata premisa /1/, exista un triplet fermatian minimal;
/3/ Ca si Euler, Legendre a utilizat metoda lui Fermat, de la exponentul 4, si a aratat ca tripletul fermatian se divide cu exponentul 5, deci urmeaza descendenta infinita;
/4/ In demonstratia premisei mediane /3/, Legendre a utilizat o descompunere in factori relativi primi a numerelor de forma $\mathbf{(Y^2 - 5Z^2)}$ (e)
1.3.4- Dar, daca, printr-o descompunere in factori a numerelor (e) rezulta o proprietate *(P)*, iar printr-o alta descompunere ar rezulta o alta proprietate *(non P)*, ar fi contrazise cele trei principii ale logicii aristotelice.

Am formulat urmatoarea propozitie:
Propozitia NIB- *Daca gasim o descompunere in factori a numerelor de forma* (e) *si din aceasta descompunere*

rezulta proprietatea (P), atunci aceasta proprietate nu poate fi contrazisa de nici o alta decompunere in factori. Asa dar, pe de-o parte, am renuntat la descompunerea in factori in corpuri ciclotomice, pentru descompunerea in corpul patratic, iar, in prezenta lucrare, am considerat neutila reluarea *teoriei divizorilor,* fiindca am gasit o procedura de a transfera intreaga problematica in corpul numerelor rationale. Pe de-alta parte, propozitia NIB este utilizabila pentru concluziile, care rezulta dintr-o anume reprezentare de numar intreg printr-o forma patratica, si care se pastreaza pentru oricare dintre automorfismele admise de forma.

Cap. 2- Teoria actuala elementara si algebrica a Marii Teoreme-

2.1- Corpul ciclotomic- Este evident ca teorema trebuie demonstrata in cazul tuturor numerelor prime impare. S-a convenit, de asemeni, ca in studiul ecuatiei Fermat (1) sa se distinga doua cazuri: *cand intregii rationali* x,y,z *nu se divid la* n *a fost numit " primul caz" al teoremei, iar cand unul si numai unul dintre numerele* x,y,z *se divide la* n *a fost considerat " al doilea caz" al teoremei.* Demonstrarea algebrica a Teorema lui Fermat este legata de problema descompunerii in factori primi a numerelor algebrice. Singura metoda generala de demonstrare apare la Kummer, unde rolul fundamental il joaca un corp *Km*, denumit *corpul m-ciclotomic.*

Definitie1- Fie *m* un numar natural si ζ o radacina primitiva de ordinul *m* a unitatii. Deoarece toate radacinile de ordinul *m* din 1 se reprezinta in planul numerelor complexe prin puncte, care impart cercul cu raza unitate in *m* parti egale, corpul $R(\zeta)$ a fost denumit *corp de diviziune al cercului in m parti*, sau *corp m- ciclotomic.*

Orice numar *a* din corpul *Km* se reprezinta in mod unic sub forma:

$$a = a_0 + a_1 \zeta + \ldots\ldots\ldots + a_{m-2} \zeta^{m-2} \qquad (2)$$

Pentru demonstrarea Marei Teoreme, Kummer a studiat prin metode profunde structura grupului unitatilor inelului *Dm*, a creat teoria idealelor si a introdus numerele regulate. Nici nu vom incerca sa detaliem aici aceste metode, exceptionale pentru dezvoltarea matematicii, utilizate de Kummer si de alti eminenti cercetatori. In rezumat, am prezentat aceste teorii in lucrarea [7].

2.2- Demonstratia lui Euler, pentru exponentul p=3

Metoda lui Euler ramane esentiala pentru abordarea Teoremei Fermat.

Pentru exponentul p=3:

$$\mathbf{x^3 + y^3 = z^3} \qquad (3),$$

Euler s-a bazat pe urmatoarea lema:

Lema Euler- *Daca numerele intregi si relativ prime* a *si* b *au proprietatea ca*
$(a^2 + \mathbf{3b^2})$ *este cubul unui numar intreg, atunci exista intregii* **s** *si* **t**, *astfel incat:*

$$a = s(s^2 - 9t^2) \quad \text{si} \quad b = 3t(s^2 - t^2) \qquad (4)$$

Demonstratia lui Euler poate fi schematizata in urmatorii pasi:

2.2.1- Se presupune ca, in tripletul **(x,y,z)**, **x** este numar par si ca alegem tripletul “minimal”, in care $|\mathbf{x}|$ are cea mai mica valoare

2.2.2- Construim numerele intregi a si b, care sunt relativ prime si de paritati diferite, prin relatiile:

$$z = b + a \,; \qquad y = b - a \qquad (5)$$

2.2.3- Punand **x=2u**, se obtine:

$$\mathbf{u^3 = \boxed{\tfrac{1}{4}}\, a\, (a^2 + 3b^2)} \qquad (6),$$

in care factorii intregi din membrul drept sunt relativ primi.

Relatia (6) *este esentiala in demonstrarea Teoremei si, sub forma generala, a fost utilizata de Legendre si preluata in cercetarea noastra.*

2.2.4- Findca factorul $(a^2 + 3b^2)$ este un cub, se demonstreaza lema, presupunand ca factorii $(a + b\boxed{\sqrt{-3}})$ si $(a - b\boxed{\sqrt{-3}})$ sunt relativ primi si, de asemeni, cuburi:

$$(a + b\boxed{\sqrt{-3}}) = (s + t\boxed{\sqrt{-3}})^{\mathbf{3}} \qquad (7)$$

Se obtin relatiile (4), in care

$$a = s(s^2 - 9t^2) \qquad \text{si} \qquad b = 3t(s^2 - t^2)$$

2.2.5- Conform lemei se deduce ca numarul

$$2s(s^2 - 9t^2) = 2s(s-3t)(s+3t) \qquad (8)$$

este un cub.

2.2.6- Factorii din membrul drept sunt, din nou, relativ primi si scriind suma algebrica a celor trei cuburi, cu $\mathbf{x_1}^3 = 2s$: $\mathbf{y_1}^3 = -(s+3t)$: $\mathbf{z_1}^3 = (s-3t)$;
se obtine: $$\mathbf{x_1}^3 + \mathbf{y_1}^3 = \mathbf{z_1}^3 \qquad (9)$$
in care $|\mathbf{x1}| > |\mathbf{x}|$, adica o contradictie fata de ipoteza.
Aceasta relatie (6) reprezinta o geniala identitate gasita de Euler, prin care se particularizeaza, insa, demonstratia pentru exponentul p=3.

2.2.7- Se ajunge la aceeasi contradictie cu minimalitatea tripletului **(x, y, z)** si daca numarul **a** ar fi presupus divizibil cu **3,** adica pentru a=3r.

2.2.8- Euler a demonstrat Lema, presupunand ca numerele complexe *(a + b*$\boxed{\sqrt{-3}}$*)* se descompun in mod unic in factori primi.
Trebuia demonstrat, si a fost demonstrat ulterior, urmatorul corolar:
In inelul intregilor patratici D_3 are loc teorema fundamentala a aritmeticii.

2.2.9- Ulterior, Legendre, prin teoria congruentelor, a demonstrat ca unul si numai unul dintre numerele x,y,z ale unei solutii a ecuatiei, se divide la 3, adica ne aflam in ”al doilea caz” al teoremei lui Fermat. Astfel, demonstratia s-a simplificat.

2.3- O formula si doua propozitii ale lui Legendre

In lucrarea “Mem.de l’Acad. des Sciences, Institut de France” (1823), A. M. Legendre, intre alte rezultate deosebite, a prezentat o formula, pe care am folosit-o pentru a face posibila trecerea de la corpul ciclotomic la corpul patratic.

Scriind ecuatia lui Fermat sub forma simetrica:

$$\mathbf{x^p + y^p + z^p = 0} \qquad \text{(1-p)},$$

Legendre a utilizat descompunerea sumei $\boldsymbol{y^p + z^p}$, cu p numar prim impar

$$\boldsymbol{y^p + z^p = (y+z)} \frac{y^p + z^p}{y+z}$$

Pentru factorul al doilea din membrul drept, Legendre a demonstrat relatia generala

$$\frac{y^p + z^p}{y+z} = \boldsymbol{(Y^2 - \varepsilon\, pZ^2)} \qquad \text{(10)},$$

unde ***Z*** si ***Y*** sunt functii numerice intregi de ***z*** si ***y***, iar $\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

“**Formulele Legendre– pentru functiile numerice *Z* si *Y*-** sunt foarte complicate” {[1], [2], [3]} dar intotdeauna se vor obtine numere intregi, iar functia ***Y*** va fi simetrica in raport cu (z, y), pe cand functia ***Z*** va fi simetrica in raport cu (z, -y).

Reproducem formulele gasite de Legendre, pentru cativa exponenti:

Pentru p=3: $\mathbf{Y= z+y}$; $\mathbf{Z= z- y}$; (10-3)

Pentru p=5: $\mathbf{Y=(z+y)^2}$; $\mathbf{Z= z^2+ y^2}$; (10-5)

Pentru p=7: $\mathbf{Y= 2(y^3+z^3)- yz (y+z)}$; $\mathbf{Z= yz (z- y)}$; (10-7)

Definitie 1- Am denumit expresiile ***Y*** si ***Z***, obtinute de Legendre, "*functiile intregi si simetrice ale lui Legendre",* pentru a le deosebi de alte expresii, pe care le vom denumi "*functiile rationale ale lui Legendre",* obtinute utilizand metoda noastra de rezolvare a ecuatiilor tip Pell (Partea I-a, cap2-2), in general, neintregi si nesimetrice in raport de variabilele y si z.
Autorii de pana acum {[1], [2]} apreciau ca reproducerea formulelor lui Legendre ar fi inutila, fiindca *"sunt foarte complicate si nu au adus nici un folos"*.

Propozitia I-a a lui Legendre- *Functiile numerice* ***Y (y,z)*** *si* ***Z (-y, z)*** *au urmatoarele proprietati****:***
k1/ sunt functii simetrice in raport de cele doua variabile ***(y,z)****, respectiv* ***(-y, z)****;*
k2 / daca variabilele y si z sunt numere intregi si relativ prime, numerele ***Z*** *si* ***Y*** *sunt intregi si relativ prime.*
Legendre a mai afirmat:
k3/ Y si Z au o expresie unica, functie de variabilele y si z;

In lucrarile noastre am aratat ca ultima afirmatie nu este adevarata in inelul numerelor intregi, pentru anumiti exponenti, iar, daca extindem problema in corpul numerelor rationale, afirmatia nu este adevarata pentru nici un exponent **p**.

Propozitia a II-a a lui Legendre- Legendre a mai aratat:

k4/ daca vom descompune:

$$v^p = \boxed{\;}\,(Y + \sqrt{\varepsilon p}\, Z).\boxed{\;}\,(Y - \sqrt{\varepsilon p}\, Z) \qquad (11),$$

cei doi factori din membrul al doilea sunt relativ primi si, fiecare dintre cei doi factori fiind o putere ***p****, rezulta:*

$$\mathbf{Z = 0 \ (mod\ p)} \qquad (12)$$

Legendre a presupus ca este unica descompunerea in factori primi a numerelor de forma

$$\mathbf{(Y + \sqrt{\varepsilon p}\, Z)} \qquad (11\text{-}1)$$

Pentru numerele **p= 4k+1**, respectiv pentru corpul patratic real, demonstratia a fost acceptata, iar afirmatia sa o putem considera teorema.
In ceea ce priveste corpul patratic imaginar, respectiv pentru exponentii **p= 4k+3**, afirmatia nu fost demonstrata nici ulterior, desi Kummer, prin a sa teorie a idealelor si prin metode neelementare, a reusit progrese remarcabile.
De aceea, pentru **p= 4k+3**, propozitia a II-a a lui Legendre a ramas la nivel de conjectura, pentru care am propus o demonstratie prin Lema E-L-B [din Cap.4].

2.4- Reprezentarea numerelor prin forme patratice

Reluam teoria din Cap.1.1 si 1.2, Partea I-a, prin urmatoarele observatii si completari:

Observatie 1- Pentru cazul particular al unui numar intreg ***w***, reprezentabil prin formele patratice binare:

$$w = \mathbf{Y^2 - \varepsilon\, pZ^2} \qquad (13),$$

teoria, in special prin Gauss si Lagrange, a rezolvat toate cele trei subiecte (S), definite mai sus (Partea I-a- Cap.1.1). Formele patratice (13) rezulta prin formulele (10), introduse de Legendre.

Observatie 2- Pentru w=4 si pentru numarul **p** nefiind patrat perfect, ecuatia (13) se confunda cu celebra ecuatie a lui Pell.

Cap. 3- Contributii la teoria actuala

3.1- Reducerea cazului al doilea al Teoremei lui Fermat la primul caz

Pana in anul 1983 se demonstrase ca, daca exista solutii pentru Teorema lui Fermat, intr-un contraexemplu, trebuia sa se opereze cu numere mai mari decat 10^6
In lucrarea [5] am demonstrat ca se poate intari foarte mult afirmatia de mai sus si anume, intr-un contraexemplu, trebuie operat cu numere x,y,z mai mari decat 10^{30}, in primul caz al teoremei, si mai mari decat 10^{18}, in al doilea caz al teoremei.

Am redemonstrat o propozitie, pe care o reproducem din [5], schimband cateva notatii:

Propozitia B1- *In inelul intregilor rationali, daca descompunem suma* $\mathbf{y^p + z^p}$, *cu* p *prim impar, in doi factori, adica*:

$$\mathbf{y^p + z^p = (y+z)} \boxed{\frac{y^p + z^p}{y+z}} \qquad (14),$$

in care y si z *sunt relativ primi intre ei si relativ primi si cu exponentul* p , *atunci primul factor se divide prin* p, *daca si numai daca cel de-al doilea factor se divide cu* p *si nu se divide cu* p^2

In primul caz al Teoremei lui Fermat, membrul din stanga al relatiei (11) fiind o putere de ordin p, iar factorii fiind relativi primi, scriem relatia:

$$\mathbf{v^p = \boxed{}(Y^2 - \varepsilon\, pZ^2)} \qquad (15\text{-}1)$$

Consecinta 1- *Din **Propozitia B1**, al doilea caz al Marii Teoreme se reduce la primul caz.*
Daca notam: **Y=pZ'** si **Z=Y'**, vom obtine:

$$\mathbf{(-\varepsilon v)^p = \boxed{}(Y'^2 - \varepsilon\, pZ'^2)} \qquad (15\text{-}2),$$

adica o relatie identica.

3.2- Metoda de generare a solutiilor rationale- g.s.r.
Metoda de generare a solutiilor rationale ale ecuatiilor omogene (metoda g.s.r), prezentata in **Partea I-a, cap.2,** isi dovedeste utilitatea si in acest caz ilustru.

Observatie 3- Este importanta **Lema 1a** [Cap.2, Partea I-a], pe care o reproducem: *Fiind data o solutie nenula* (x_1 , x_2 …..x_n *) a unei ecuatii patratice cu* n>1*, se pot deduce, printr-o relatie de recurenta, cel putin alte doua solutii in numere rationale positive; cu exceptia solutiei banale, din care se poate deduce numai o singura alta solutie.*

Am mai aratat (ibidem) ca, prin aplicarea metodelor de generare a solutiilor rationale (g.s.r), posibile totdeauna in cazul ecuatiilor de tipul (13), putem determina in mod concret reprezentarile unui numar intreg ***w***, respectiv putem deduce alte solutii rationale, daca se cunoaste o solutie oarecare, inclusiv cea banala, a ecuatiei patratice de tip Pell (13).

Prin *metoda g.s.r.* se evita determinarea solutiei minime pozitive, utilizata in metoda Lagrange, unde determinarea solutiei nu este totdeauna facila.

In cazul real, al ecuatiei Pell:

$$\mathbf{x^2 - py^2 = 1} \qquad (16\text{-}1).$$

pentru **p>1**, matricea **B** se scrie:

$$\boxed{B = \frac{1}{p-1}\begin{bmatrix} p+1 & 2p \\ 2 & p+1 \end{bmatrix}} \qquad (17\text{-}1)$$

In metoda generala de determinare a solutiilor rationale pentru ecuatia de tip Pell, am demonstrat ca **Lema 1a** se aplica sl in cazul imaginar, adica pentru ecuatia:

$$\mathbf{x^2+py^2 = 1} \qquad (16\text{-}2).$$

Matricea **B**, in cazul imaginar si pentru **p ≠ -1**, se scrie:

$$\boxed{B = \frac{1}{p+1}\begin{bmatrix} p-1 & 2p \\ -2 & p-1 \end{bmatrix}} \qquad (17\text{-}2)$$

Utilizand notatia $\boxed{\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}}$ **,** putem sa scriem o ecuatie de forma generala:

$$\mathbf{Y^2 - \varepsilon\, pZ^2 = 1} \qquad (16)$$

Pentru **p= 4k+1**, vom avea cazul real, matricea **B**, care genereaza multimea solutiilor rationale, fiind de forma (17-1), iar pentru **p= 4k+3**, vom fi in cazul imaginar, matricea **B** scriindu-se sub forma (17-2).

3.3- Completarea propozitiilor lui Legendre

Prin contributiile enuntate mai sus, propozitiile lui Legendre se completeaza astfel:

Propozitia Legendre- Bratu- *In corpul numerelor rationale,* partea k3 a propozitiei I-a a lui Legendre se modifica astfel:
k3 / pentru orice exponent **p***, exista cel putin trei reprezentari ale functiilor* ***Y*** *si* ***Z****, prin variabilele y si z;*
In consecinta, se modifica si partea k1/ a propozitiei Legendre:
k1/ exista o reprezentare a functiilor numerice ***Y (y,z)*** *si* ***Z (-y, z),*** *in care acestea sunt functii simetrice in raport de cele doua variabile* ***(y,z)****, respectiv* ***(-y, z)****; celelalte reprezentari nu sunt, in general, simetrice in raport de variabilele y si z.*
Partea k2/ a propozitiei I-a si propozitia a II-a a lui Legendre le vom pastra, pentru inceput, intacte, dar vom reveni asupra lor in capitolul urmator:
k2 / daca variabilele y si z sunt numere intregi si relativ prime, numerele ***Z*** *si* ***Y*** *sunt intregi si relativ prime.*
k4/ daca vom descompune:

$$v^p = (Y + \sqrt{\varepsilon p}\,Z) . (Y - \sqrt{\varepsilon p}\,Z) \qquad (11),$$

cei doi factori din membrul al doilea sunt relativ primi si, fiecare dintre cei doi factori fiind o putere p, rezulta:

$$\boldsymbol{Z = 0 \ (mod\ p)} \qquad (12)$$

In demonstrarea relatiei (12), Legendre a presupus ca este unica descompunerea in factori primi a numerelor de forma $\boldsymbol{(Y + \sqrt{\varepsilon p}\,Z)}$ *(11-1)*

Observatie 4- Pentru a determina o alta solutie intreaga (Y_r, Z_r), putem sa utilizam sau metoda fractiilor continue, sau observatia noastra din partea I-a, cap 2.3.
Totusi, consideram ca, pentru demonstratia noastra nu este absolut necesara determinarea unei alte solutii intregi (Y_r, Z_r). Numitorul**,** care apare in expresiile (17) ale matricei B, de generare a solutiilor rationale, este numarul **p±1,** care nu este nul si nu este divizibil prin *p:* $p \pm 1 \neq 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$.
In demonstratia propusa in continuare**,** va fi esentiala congruenta modulo p a numaratorului din formulele:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} . \mathbf{B} \qquad (18),$$

iar numitorul numerelor Y_1 si Z_1 nu va putea modifica congruenta $Z'_1 = 0\ (mod\ p)$, respectiv $Y'_1 = 0\ (mod\ p)$, in care Y'_1 si Z'_1 sunt numaratorii, numere intregi din expresia rationala a numerelor Y_1 si Z_1. Se poate justifica astfel posibilitatea scrierii directe, in continuare, a congruentei modulo p asupra numerelor rationale Yi si Zi, respectiv a numaratorilor acestora, $Y'i$ si $Z'i$, numere intregi, fara a mai mentiona ca este vorba despre numaratorii acestor numere rationale.

Observatie 5-Din aceasta prezentare rezumativa, rezulta ca, in corpul numerelor rationale, exista alte expresii pentru functiile numerice Y si Z din relatia (10).
Noile expresii, Y_i si Z_i, generate prin metoda g.s.r., nu mai sunt, in general, simetrice in raport de variabilele (y, z), respectiv (-y,z), si le-am denumit *functiile rationale ale lui Legendre.*

Cap. 4 – Demonstratia Euler-Legendre- Bratu pentru Ultima Teorema Fermat

Daca metoda generarii solutiilor rationale- g.s.r.- a permis trecerea de la corpul ciclotomic la cel patratic, prin Lema Euler- Legendre- Bratu- demonstrata in continuare- se poate transfera intreaga problematica la corpul numerelor rationale, in care teorema fundamentala a aritmeticii are valabilitate.

4.1- O alta cale in demonstratia lui Euler, pentru exponentul p=3

Este evident ca intr-o incercare de generalizare a ideilor lui Euler, in cuprinsul demonstratiei sale pentru exponentul 3, trebuie gasita o alta cale, care sa evite utilizarea identitatii particulare gasite de Euler, de la pasul 2.2.6, de mai sus, unde am obtinut relatia (9) : $\mathbf{x_1^3 + y_1^3 = z_1^3}$

Mai intai, observam ca este valabila si se verifica usor afirmatia *k4/* a propozitiilor Legendre. Daca scriem:
$\mathbf{Y = a = s(s^2 - 9t^2)}$ si $\mathbf{Z = b = 3t(s^2 - t^2)}$ (19),
se verifica **Z= 0 (mod3)** (12-3)

Vom aplica **propozitia Legendre- Bratu** pentru cazul **p=3** si **ε= -1 :**
Scriem ecuatia (3) sub forma:

$$\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 = 0} \qquad (1\text{-}3)$$

Demonstratia, prin aceasta noua metoda, pentru exponentul **p=3**, a fost schematizata [6] in urmatorii pasi:

4.1.1- Se presupune ca, in tripletul **(x,y,z)**, **x** este numar par si ca alegem tripletul "minimal", in care **|x|** are cea mai mica valoare.

4.1.2- Legendre a demonstrat ca, pentru exponentul **p=3,** ne aflam in cazul al doilea al Teoremei. Presupunem y= 0 (mod 3).

4.1.3- Construim numerele intregi **Z** si **Y**, care sunt relativ prime si de paritati diferite, prin relatiile:

$$\mathbf{Z} = z - y \,; \quad Y = z + y \qquad (20)$$

4.1.4- Punand **x=2u**, se obtine:

$$u^3 = \square\, Y\,(Y^2 + 3Z^2) \qquad (21),$$

in care factorii intregi din membrul drept sunt relativ primi.

4.1.5- Fiindca factorul $(Y^2 + 3Z^2)$ este un cub, iar Y si Z sunt relativ prime, se aplica propozitia L-B pentru cubul :

$$w^3 = (Y^2 + 3Z^2) \qquad (22)$$

si fiindca am presupus ca suntem in *cazul al doilea* cu y= 0 (mod 3), avand:

$$Z = z - y \quad \text{si} \quad Z = 0 \pmod 3,$$

urmeaza z=0 (mod 3) si descendenta infinita, adica este adevarata Teorema Fermat.

4.1.6- Demonstratia a fost completata pentru aceleasi lacune ca la Euler, in principal a trebuit sa fie demonstrat corolarul: *In inelul intregilor patratici D_3 are loc teorema fundamentala a aritmeticii*.

4.2- O alta cale in demonstratia lui Legendre, pentru exponentul p=5

4.2.1 - Legendre a demonstrat Teorema Fermat pentru p=5, prin aplicarea teoriei congruentelor si plecand de la studierea intregilor algebrici de forma

$V_5 = \square\,(Y + \square Z)$, unde Y si Z sunt relativ prime si avem:

$$\mathbf{Z=0\ (mod\ 5)} \qquad (12\text{-}5).$$

Intregii algebrici V_5 sunt numere reale, iar descompunerea in factori primi nu a intampinat dificultatile din cazul **p=3**, unde numerele erau complexe.

4.2.2 Pentru **p=5**, conform (10-5), avem:

$$\mathbf{Y=(z+y)^2} \text{ si } \mathbf{Z=z^2+y^2} \qquad (10\text{-}5).$$

4.2.3- In locul aprofundarii teoriei congruentelor, efectuate in continuarea demonstratiei lui Legendre, aplicam partea k3 a propozitiei **L-B**, respectiv relatia (17-2) si obtinem alte expresii pentru functiile lui Legendre Y si Z:

$$\boxed{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}} \mathbf{.\ B_5} \qquad (18\text{-}5),$$

in care $\mathbf{B_5}$ este o matrice **B** in cazul real, conform relatiei (17-1), pentru **p=5**. Rezulta:

$$\mathbf{Y_1 = 4z^2 + 3zy + 4y^2} \text{ si } \mathbf{Z_1 = 2z^2 + zy + 2y^2} \qquad (23),$$

iar din congruenta $\mathbf{Z_1 = 0\ (mod\ 5)}$ (24),
urmeaza **Y= 0 (mod 5)**, deci **z=y=0 (mod 5)**, adica descendenta infinita.

Observam ca, pentru exponentii 3 si 5, numerele lui Legendre, Y_1 si Z_1, sunt numere intregi, ca si Y si Z.

4.3- Demonstratia Ultimei Teoreme Fermat pentru exponentii p=4k+1.

4.3.1- Cazul exponentilor p= 4k+1 este rezolvabil in corpul patratic real R($\sqrt{p}$).

Daca a fost acceptata argumentatia lui Legendre, privind descompunerea in factori primi in corpurile patratice reale R($\sqrt{p}$), propozitia L-B, utilizata la demonstratia Teoremei pentru exponentul p=5, este aplicabila in demonstratia pentru “cazul real”.

Pentru exponentul **p=5**- tratat mai sus in cap. 4.2- intregii algebrici

$$U_5 = \frac{1}{2}(Y + \sqrt{5}Z) \qquad \text{sunt numere reale.}$$

Prin completarea ideilor lui Euler si Legendre, metoda aplicata exponentului **5** poate avea reusita pentru orice **p=4k+1,** unde, de asemeni, se opereaza cu numere reale.

4.3.2- Se poate demonstra analog lui Legendre ca numerele

$$U_p = \frac{1}{2}(Y + \sqrt{\varepsilon p}Z) \qquad (25),$$

pentru orice p numar prim de forma 4k+1 si **ε** = 1, sunt intregi algebrici.

4.3.3- Daca numerele Y si Z sunt relativ prime, prin propozitia Legendre- Bratu, se obtine ca:

$$\mathbf{Z=0\ (mod\ p)} \qquad (21).$$

4.3.4- Aplicam partea k3 a propozitiei **L-B**, respectiv relatia (17-1), si, din functiile intregi si simetrice ale lui

Legendre, Y si Z , obtinem expresii pentru functiile rationale ale lui Legendre, Y_1 si Z_1 :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} . \mathbf{B}_p \qquad (18\text{-p})$$

in care $\mathbf{B}_p$ este matricea **B** in cazul real, din relatia (17-1):

$$B = \frac{1}{p-1}\begin{bmatrix} p+1 & 2p \\ 2 & p+1 \end{bmatrix}$$

Rezulta:

$$Y_1 = \frac{1}{p-1}[(p+1)Y + 2p\,Z] \qquad \text{si}$$

$$Z_1 = \frac{1}{p-1}[\,2\,Y + (p+1)\,Z] \qquad (26).$$

4.3.5- Din congruenta

$$Z_1 = 0 \pmod p \qquad (27),$$

aplicata numaratorului $\mathbf{Z'}_1$,
urmeaza Y= 0 (mod p), deci z=y=0 (mod p), adica descendenta infinita si concluzia Teoremei Fermat.

Observam ca pentru exponenti p>5, numerele lui Legendre, Y_1 si Z_1 , nu mai sunt, in general, numere intregi, ca Y si Z.

4.4- Demonstratia Ultimei Teoreme Fermat pentru exponentii p oarecari

Pentru exponentii p= 4k+3, denumit “cazul imaginar”, unicitatea descompunerii in factori primi in corpul patratic imaginar R ($\sqrt{-p}$), presupusa de Euler si Legendre, nu mai are valabilitate.

Aceasta dilema a aparut si in cursul demonstratiei *propozitiei k4*, care apartine lui Legendre si pe care o reproducem:

k4/ Daca vom descompune:

$$v^p = \boxed{\;}\,(Y + \sqrt{\varepsilon p}\,Z).\,\boxed{\;}\,(Y - \sqrt{\varepsilon p}\,Z) \qquad (11),$$

*cei doi factori din membrul al doilea sunt relativ primi si, fiecare dintre cei doi factori fiind o putere **p**, rezulta:*

$$\boldsymbol{Z = 0 \ (\mathrm{mod}\ p)} \qquad (12)$$

In demonstrarea relatiei(12), Legendre a presupus ca este unica descompunerea in factori primi a numerelor de forma $\boldsymbol{(Y + \sqrt{\varepsilon p}\,Z)}$ *(11-1)*

Dar, ne intrebam: Este unica, oare, calea de demonstrare a relatiei (12) a lui Legendre ? Daca am putea evita descompunerea in factori in corpuri patratice imaginare R ($\sqrt{-p}$), demonstratia Euler- Legendre, completata ca mai sus, ar putea fi generalizata.

Reluam, deci, demonstratia ab initio, inserand o noua idée .

4.4.1- Scriem ecuatia lui Fermat sub forma simetrica:

$$\mathbf{x^p + y^p + z^p = 0} \qquad (28)$$

4.4.2- Legendre a utilizat descompunerea sumei $\mathbf{y^p + z^p}$, cu **p** numar prim impar $\mathbf{y^p + z^p = (y+z)}\ \boxed{\frac{y^p + z^p}{y+z}}$

Pentru factorul al doilea din membrul drept, Legendre a demonstrat relatia generala

$$\boxed{\frac{y^p + z^p}{y+z}} = \boxed{\;}\ \ \mathbf{(Y^2 - \varepsilon\, pZ^2)} \qquad (10),$$

unde **Z** si **Y** sunt functii numerice intregi de **z** si **y**, iar

$\boxed{\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}}$

4.4.3- Pastram si utilizam formula si propozitiile lui Legendre:

Propozitia I-a Legendre- *Functiile numerice **Y (y,z)** si **Z (-y, z)** au urmatoarele proprietati**:***

*k1/ sunt functii simetrice in raport de cele doua variabile **(y,z)**, respectiv **(-y, z)**;*

k2 / daca variabilele **y** *si* **z** *sunt numere intregi si relativ prime, numerele **Z** si **Y** sunt intregi si relativ prime.*

4,4.4- Legendre a reusit sa demonstreze ca, daca:

$$w^p = (Y^2 + pZ^2) \qquad (29),$$

unde Y si Z sunt relativ prime, se obtine:

$$\mathbf{Z=0\ (mod\ p)} \qquad (31)$$

Euler, Legendre si toti cercetatorii care s-au ocupat de ecuatia generala (29) {[1], [2], [3]}, au cautat in mod corect [am demonstrat in Partea I-a- cap. 1.4] solutii de forma:

$$w = (r^2 + ps^2) \qquad (30),$$

unde **r** si **s** sunt intregi arbitrari

4.4.5- Apoi, prin metoda initiata de Euler- Legendre, se procedeaza la descompunerea in factori a numerelor $\mathbf{w^p}$ si **w** in corpul patratic imaginar R($\boxed{\sqrt{-p}}$), comsiderandu-se:

$$Y + \boxed{\sqrt{-p}}\, Z = (r + \boxed{\sqrt{-p}}\, s)^p$$

$Y - \sqrt{-p}\, Z = (r - \sqrt{-p}\, s)^p$

Rezulta **Y** si **Z** ca expresii polinomiale in **r** si **s**.

Trebuie demonstrata unicitatea descompunerii in factori primi, in corpurile de intregi algebrici $R(\sqrt{-p})$.

Rezolvarea este particulara pentru diverse corpuri, fiind necesara studierea unitatilor inelului de intregi algebrici $\mathbf{D_p}$, dupa metodele initiate de Kummer, privind numerele prime regulate.

Prin aceasta metoda, dar omitand necesitatea demonstrarii unicitatii descompunerii in factori primi, Euler a demonstrat Teorema lui Fermat, pentru p=3.

Euler a obtinut relatiile (4) din cap.2.2:

$$Y = s(s^2 - 9t^2) \qquad \text{si} \qquad Z = 3t(s^2 - t^2)$$

4.4.5-1 - Inlocuim fragmentul 4.4.5 din demonstratia de mai sus prin urmatoarea:

Lema Euler- Legendre-Bratu- pe care o vom demonstra in cap. 4.5.

B1- *Daca numarul **w** are reprezentarea*

$$w = (r^2 + ps^2) \qquad (32),$$

*unde **r** si **s** sunt intregi arbitrari, atunci*

$$w^p = (Y^2 + pZ^2) \qquad (33),$$

*in care **p≥3** este numar prim impar, **Y** si **Z** sunt functii numerice de **r** si **s**, iar pentru numarul **Z** avem congruenta:*

$$\mathbf{Z = 0 \ (mod\ p)} \qquad (34)$$

B2- *Pentru numarul* $w^p = (Y^2 + pZ^2)$*, in corpul numerelor rationale, exista o reprezentare prin functiile intregi si*

simetrice, ***Y*** *si* ***Z,*** *ale lui Legendre si mai exista cel putin doua alte reprezentari prin functii rationale* $\mathbf{Y_i}$ *si* $\mathbf{Z_i}$
B3- *Lema este valabila, de asemeni, pentru reprezentarea numarului* ***w*** *prin forma patratica* $(r^2 - ps^2)$*, denumit mai sus " cazul real".*

4.4.6-Se pastrezaza fragmentul 4.3.5 din demonstratie. Am demonstrat (cap.1) ca proprietatea **Z= 0 (mod p)** este valabila pentru toate transformarile liniare proprii ale formei patratice de reprezentare a numarului **w**.
Din congruenta

$$\mathbf{Z_1 = 0 \ (mod\ p)} \qquad (37),$$

aplicata numaratorului $\mathbf{Z'_1}$ din realatia (36) **,**
urmeaza **Y= 0 (mod p)**, deci r=s=0 (mod p), respectiv z=y=0 (mod p), adica descendenta infinita, descoperita de Fermat.

4.4.7-Am ajuns la concluzia:
Intre numerele intregi nenule nu exista niciun triplet fermatian;
care este formularea *Ultimei Teoreme a lui Fermat*

4.5- Lema Euler- Legendre-Bratu

Aceasta parte a lucrarii am introdus-o la sugestia fratelui meu si o socot, alaturi de metoda g.s.r., o contributie importanta pentru demonstrarea Ultimei Teoremei.

Prin Lema enuntata si demonstrata aici, se poate transfera problematica de la corpul patratic la corpul numerelor rationale, in care teorema fundamentala a aritmeticii are valabilitate.

Lema E.L.B.:

B1- Daca numarul w are reprezentarea

$$w = (r^2 + ps^2) \qquad (32),$$

unde r si s sunt intregi arbitrari, iar p numar prim impar, atunci $w^p = (Y^2 + pZ^2)$ ***(33),***
in care p este numar prim impar, Y si Z sunt functii numerice de r si s, iar pentru numarul Z avem congruenta:

$$Z = 0 \ (\mathrm{mod}\ p) \qquad (34);$$

B2- Pentru numarul $w^p = (Y^2 + pZ^2)$***, in corpul numerelor rationale, exista o reprezentare prin functiile intregi si simetrice- Y si Z- ale lui Legendre si mai exista cel putin doua alte reprezentari prin functii rationale Yi si Zi.***
B3- Lema este valabila, de asemeni, pentru reprezentarea numarului w prin forma patratica $(r^2 - ps^2)$***, respectiv pentru exponenti p= 4k+1, denumit cazul real.***

Demonstratia **partii B1** a lemei se face plecand de la identitatea:

$$(a^2 + pb^2)(c^2 + pd^2) = (ac - pbd)^2 + p(ad + bc)^2 \qquad (35);$$

Daca ridicam $(a^2 + pb^2)$ la puterea **p** , prin inmultiri repetate si utilizand identitatea (35), si daca notam cei doi termeni din membrul al doilea al relatiei (35) prin C_j si D_j, corespunzator puterii **j** a numarului **w**, obtinem:

$w^2 = (a^2 + pb^2)^2 = (a^2 - pb^2)^2 + p\ (2ab)^2 = C_2 + p\ D_2$;

$w^3 = (a^2 + pb^2)^3 = (a^3 - 3\ p\ a\ b^2) + p\ (3\ a^2 b - p\ b^3) =$

$= C_3 + p\ D_3$; etc.

Pentru simplitatea expunerii ne vom referi numai la termenul D_j , pe care il vom scrie functie de congruenta modulo p.

Astfel, pentru puterea j vom avea:

$D_j = [j\ a^{j-1}\ b + p\ f\,(a,b)]$, iar la puterea **p**, obtinem:

$D_p = [p\ a^{p-1}\ b + p\ f\,(a,b)]$, ceea ce implica

$D_p =$ **Z= 0 (mod p)** -qed

Partea B2 a lemei a fost demonstrata mai sus, la cap 4.3. Aplicam partea k3 a propozitiei **L-B**, respectiv relatia (17-2) si, din functiile intregi si simetrice ale lui Legendre, Y si Z , obtinem expresii pentru functiile rationale ale lui Legendre, Y_1 si Z_1 :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} . \mathbf{B}_p \qquad (18\text{-p})$$

in care $\mathbf{B}_p$ este matricea **B** in cazul imaginar, din relatia (17-2), pentru **p=4k+3:**

$$B = \frac{1}{p+1}\begin{bmatrix} p-1 & 2p \\ -2 & p-1 \end{bmatrix} \qquad (17\text{-}2).$$

Prima solutie rationala - care poate fi solutie in numere intregi, ca in cazurile p = 3 si p=5- rezulta din relatia (18-p):

$$Y_1 = \boxed{\frac{1}{p+1}}\ [(p - 1)Y + 2p\,Z] \qquad \text{si}$$
$$Z_1 = \boxed{\frac{1}{p+1}}\ [-\ 2\,Y + (p - 1)\,Z] \qquad (36).$$

Partea B3 a lemei se refera la cazul real, iar in relatiile de mai sus se va inlocui p prin (–p).
Lema are, asa dar, valabilitate generala, pentru orice exponent $p \geq 3$, numar prim impar.

4.6- Exemplificarea metodei prin demonstrarea cazurilor p=3 si p=5.
In finalul contributiei noastre pentru demonstrarea Ultimei Teoreme a lui Fermat, exemplificam demonstratia in cazurile cele mai simple de exponenti.

4.6.1- Demonstratia Ultimei Teoreme a lui Fermat pentru exponentul p=3.

/3.1/ Scriem ecuatia lui Fermat sub forma:
$$\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 = 0} \qquad (38)$$

/3.2/ Dintre toate tripletele (x,y,z) de numere intregi, relativ prime, cu **x** numar par, care satisfac ecuatia (38), alegem tripletul “minimal”;

/3.3/ Construim numerele intregi **Z** si **Y**, care sunt relativ prime si de paritati diferite, prin relatiile:
$$\mathbf{Z} = z - y\ ; \quad Y = z + y; \qquad (39)$$

/3.4/ Punand **x=2u**, se obtine:

$u^3=$ [illegible] $Y\,(Y^2 + 3Z^2)$ (40),

in care factorii intregi din membrul drept sunt relativ primi.

/3.5/ Fiindca factorul $(Y^2 + 3Z^2)$ este un cub, iar Y si Z sunt relativ prime, se aplica Lema E-L-B pentru cubul :

$w^3= (Y^2 + 3Z^2)$ (41)

si obtinem: $Z= z - y = 0 \pmod 3$ (42)

Daca am presupus ca suntem in cazul al doilea al Teoremei, adica $y=0 \pmod 3$, urmeaza imediat descendenta infinita; in caz contrar, putem sa continuam astfel:

/3.6/ Transformam liniar forma patratica (41) prin relatia matriceala

$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$. **B** , unde

$B = \frac{1}{p+1}\begin{bmatrix} p-1 & 2p \\ -2 & p-1 \end{bmatrix}$, pentru p=3 (43)

si vom obtine alte expresii pentru functiile lui Legendre:

$Y_1 = 2z-y$ si $Z_1= y$ (44).

/3.7/ Din congruenta $Z_1= y= 0 \pmod 3$ (45), asociata prin congruenta (42), urmeaza

$z= y=0 \pmod 3$ (46).

/3.8/ Deci am ajuns la contradictie fata de ipoteza si la descendenta infinita, procedeu gasit de Fermat si utilizat de Euler si de Legendre in demonstratia Ultimei Teoreme, pentru exponentii 3 si 5.

4.6.2- Demonstratia Ultimei Teoreme a lui Fermat pentru exponentul p=5

Urmam o secventa similara cu cea din cazul exponetului 3.

/5.1/ Scriem ecuatia lui Fermat sub forma:

$$\mathbf{x^5 + y^5 + z^5 = 0} \tag{47}$$

/5.2/ Dintre toate tripletele (x,y,z) de numere intregi, relativ prime, cu **x** este numar par, care satisfac ecuatia (47), alegem tripletul "minimal";

/5.3/ Construim numerele intregi **Z** si **Y**, care sunt relativ prime si de paritati diferite, prin relatiile:

$$\mathbf{Y=(z+y)^2 \;;} \qquad \mathbf{Z= z^2+ y^2 \;;} \tag{48}$$

/5.4/ Se transforma ecuatia Fermat:

$$u^5 = \square\, Y (Y^2 + 3Z^2) \qquad (49),$$

in care factorii intregi din membrul drept sunt relativ primi.

/5.5/ Fiindca factorul $(Y^2 + 3Z^2)$ este o putere de ordinul 5, iar Y si Z sunt relativ prime, se aplica Lema E-L-B pentru

$$w^5 = (Y^2 + 3Z^2) \qquad (50)$$

si obtinem: $Z = z^2 - y^2 = 0 \pmod 5$ (51)

/5.6/ Transformam liniar forma patratica (50) prin relatia matriceala

$\boxed{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}}$ **.** B , unde $\boxed{B = \frac{1}{p-1}\begin{bmatrix} p+1 & 2p \\ 2 & p+1 \end{bmatrix}}$, cu p=5, (52)

si vom obtine alte expresii pentru functiile lui Legendre:

$Y_1 = 4z^2 + 3zy + 4y^2$ si $Z_1 = 2z^2 + zy + 2y^2$ (53)

/5.7/ Din congruenta

$Z_1 = 2z^2 + zy + 2y^2 = 0 \pmod 5$ **(**54),

asociata congruentei (51), urmeaza

$z = y = 0 \pmod 5$ (55).

/5.8/ Deci am ajuns la o contradictie fata de ipoteza si, prin aceasta, la descendenta infinita si la demonstrarea Ultimei Teoreme.

Incheem aici prezentarea contributiei noastre pentru demonstratia Ultimei Teoreme.

&&*&*

POSTLOG

“Am descoperit o demonstratie cu adevarat minunata, dar nu am aici destul spatiu , pentru a o scrie” sunt celebrele cuvinte ale lui Pierre de Fermat; dar demonstratia s-a dovedit imposibila, prin metodele de atunci si chiar prin cele de peste cateva secole, pentru cele mai stralucite minti de pe pamant.
H Poincare , in cartea sa “ La valeur de la sciences”, a concentrat, intr-o frumoasa reflectie, ideea ca spiritul uman se aseamana unui “fulger in mijlocul unei lungi nopti intunecate”.
In lucrarea de fata, completand unele idei ale lui Euler si Legendre si adaugand altele noi, am incercat sa aprind o “faclie” intr-o noapte de cautari, ce a durat aproape patru secole.

Este o cutuma ca autorul sa aduca multumiri celor care au avut un aport in publicarea lucrarii. Nu vom uita sa multumim editorului, dr.ing. Dumitru Manescu, pentru amabila colaborare
Intr-o “scrisoare matematica” de demult, trimisa catre institutii si personalitati, am citat si nu am multumit de ajuns unor mari matematicieni, care m-au incurajat si mi-au elogiat ideile: M N Gopalan (India), M Hirschhorn (Australia), F Luca (SUA), L Funar (Franta), H Ibsted (Suedia), N Popescu si M Bencze (Romania) si multor altora, unii inca anonimi; nici acum nu am cuvinte destule sa le multumesc.
Amintesc, si sunt bucuros sa adaug, ca fiica mea Adina si fiul meu Ben mi-au citit mamuscrisul si au adus unele imbunatatiri.
Este un prilej, poate ultimul, de a exprima tuturor profunda mea gratitudine..
Dar cartea este scrisa la indemnul fratelui meu, Ion Bratu, ultimul plecat la Dumnezeu dintre ai mei, prea devreme si pe nedrept ucisi. Si, fiindca in mintea si in sufletul meu, prima datorie se cuvine fata de tara si de stramosi, lor, fratelui si parintilor mei, le dedic realizarea publicata acum.

&&*&*

REFERIRI

1/// DICKSON L. E. - *History of the Theory of Numbers*, Washington- 1920, Add. Washington Press

2/// BACHMANN P.- *Das Fermatproblem in seiner bisherigenEntwicklung*- Springer Verlag- Berlin- 1976

3/// HARDY G.H., WRIGHT E.M. – *An introduction to theory numbers* – Oxford 1960

4/// WILES ANDREW- *Fermat's LastTheorem,* Conf. of the proof, Boston University-1995

5//// BRATU I.N.- *O afirmatie mai tare pentru criteriul lui Grunnert dinUltima Teorema a lui Fermat,* Bucuresti- 1991, Gaz. Mat. nr. 3- 4

6/// BRATU I.N. - *Eseu asupra ecuatiilor diofantice*, Craiova-1994, Ed. Adel

7/// BRATU I.N. - *Note de analiza diofantica*, Craiova-1996, Ed .M. Dutescu

8/// BRATU I .N. and CRETAN N.A.- *On the Cubic Combination and the Third Degree Ramanujan Identities,* Varahimir Journal of Math. Sc. Canada-2005 (to appear)

9/// BRATU I.N. - *Considerațiuni de analiza diofantica si despre Ultima Teorema a lui Fermat* - Memoriu catre Academia Romana- 1983 (nepublicat)

**** Sfarsit Partea a II-a ****

SUMMARY

Part 1- The Theorem of the Three Distinct Squares

Four hundred years ago, Bachet and Fermat enunciated a special conjecture: “Any positive integer can be expressed under the form of a sum of four squares at the most”. Lagrange, using the identity of Euler and the theory of the quadratic remainder, found an extremely beautiful proof for the conjecture and he gave his name to the ‘Theorem of the Four Squares” [Lagrange’s four-square theorem]. An important completion to the proof was brought by Legendre. Along the last 23 years, in a series of memoirs and articles, I formulated, among others, a proposition that I called “The Theorem of the Three Distinct Squares” and which mainly sounded like this: “In order to represent any natural number by the sum of the squares there are sufficient three integer numbers”. Therefore, I reinforced, modified and renamed the Theorem of Lagrange. The authorship of this theorem cannot be commented upon, and I mean not only as a temporal but a especially, because the theorem is a consequence of the general theory and naturally it results from a new identity and a new function which is called “Quadratic Combination”.

Our contributions to the numbers’ theory which were presented in detail in the bibliography works are limited to the enunciations only. Among these, we selected as being useful and interesting for the theme in the title the following: 1- The method of generating rational solutions *(g.r.s.)* – the matrix variant and of the term variant; 2- A Gauss’ Theorem generalization. The objects of our subject were the homogeneous equations and the ones that are reductible to the first mentioned, written under the form

$$a_1 x_1^2 + \ldots + a_i x_i^2 - a_{i+1} x\boxed{} - \ldots - a_n x\boxed{} = r$$

(15),

where $\mathbf{a_1, a_2 \ldots\ldots a_n}$ are positive integer numbers, r being also an integer number.

The principle of the solving method derives from the following lemma, in a simplified formulation, with reference to the solution set in the positive rational numbers:

Lemma 1a- Given a non zero solution $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ of an quadratic equation with n>1, there can be deduced, by a recurrent relation, ay least other two solutions in the positive rational numbers, except the case when the equation admis the ordinary solution, of which it can be deduced one only different solution. If we define an order relation, the representation of the solution set can be made by made by an oriented graph. An equivalent and completed form of the lemma is the following

Lemma 1b- Set F^2 of the solutions of equation E^2 is isomorphic to the nodes of the oriented graph G^2, defined by a recurrent relation

In order to exemplify the proposed general method, I used it to prove the solvability and to construct the solutions for several equations that are well-known and solved in the current theory, as:

Pell's equation- $\mathbf{x^2 - Dy^2 = 1}$ (18-1)

In the determination of the solutions, regarding the general equation, we can start from any solution and by a recurrent relation we can generated the whole set of solutions. Of course, the simplest solution to start from it is the ordinary solution, if this one exists. In the graphic representation, the set of rational solutions is a chain.

The Pythagorean equation- $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$ (3)

The graph of the reduced solutions of this equation is a tree.

The equation called twin with Pythagorean equation- $\mathbf{x^2+2y^2=z^2}$ (5) from the point of view of the function "the quadratic combination".

The homogenous quadratic quaternary equation- $\mathbf{x^2+y^2+z^{2=}w^2}$ (9) has an important role in the representation of numbers by quadratic sums.

In the matrix variant, the solutions are generated by the relation $\mathbf{S_{i+1} = S_i . B}$, and the matrix B is written:

$$B = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}} \qquad (21).$$

It is proved an important **proposition 19**: *There is an isomorphism between the set* $\mathbf{F_3^2}$ *of the solutions of equation* $\mathbf{E_3^2}$ *and the set of nodes of graph* $\mathbf{G_3^2}$*, oriented towards the ascended variation of the variable* w

In chapter 3 there are presented the results: *The Bratu' Identity, The Quadratic Combination*, and *The Theorem of the Tree Distinct squares.* It is proved that the Theorem of The Tree Distinct Squares resulting naturally from the function Quadratic Combination, a function that, it its turn, is a consequence of the Bratu' Identity and of the Bratu' Lemma. I found a great identity, which associates the solutions of the ternary equations with solutions of the quaternary equation.

If $\mathbf{S'_1= (x'_1, y'_1, z'_1)}$ and $\mathbf{S'_2= (x'_2, y'_2, z'_2)}$ is two common solutions in set $\mathbf{F_2'}$, which come from the reduced solutions $\mathbf{S_1}$ and $\mathbf{S_2}$, than there are

the Bratu' identities:

a1/ $\mathbf{2 (z'_1.z'_2 \square x'_1. x'_2 \square y'_1.y'_2) = Z^2}$, where Z is integer number;

b1/ $\mathbf{X= x_1 \square x_2}$; $\mathbf{Y= y_1 \square y_2}$; $\mathbf{W= z_1 \square z_2}$ and $\mathbf{Z}$ are solutions of the quaternary equation:

$$\mathbf{X^2 + Y^2 \,\square\, cZ^2 = W^2} \qquad (7\text{-}1)$$

and analogically, there are still other 'sister identities':.

a2/ $\mathbf{(z'_1 . z'_2 \,\square\, x'_1 . y'_2 \,\square\, y'_1 . x'_2) = Z_1^2}$,where Z_1 is integer number;

b2/ $\mathbf{X_1 = x_1 \,\square\, y_2}$; $\mathbf{Y_1 = y_1 \,\square\, x_2}$; $\mathbf{W_1 = z_1 \,\square\, z_2}$ and $\mathbf{Z_1}$ are solutions of the quaternary equation *(7-1)*

Starting from Bratu' identity, I proved the following **Bratu' Lemma**:

Given two solutions of the complete system of solutions of the homogenous ternary equation (3), out of the two solutions there can be generated four solutions– that can be also equal two by two- for each of the four quaternary equations (24).It named the four equations "twin equations".

I defined: **The quadratic combination** is a numerical function, marked CP, which associated to every two solutions in the complete system of solutions of the homogenous ternary quadratic equation, four solutions for each of the four quaternary quadratic equations called "twin equations".

$$\mathbf{X^2 + Y^2 + Z^2 = W^2} \qquad (25)$$

$$X^2 + \mathbf{Y^2 - Z^2 = W^2} \qquad (26)$$

$$\mathbf{X^2 + Y^2 + 2\,Z^2 = W^2} \qquad (27)$$

$$\mathbf{X^2 + Y^2 - 2\,Z^2 = W^2} \qquad (28)$$

It is presented the general solution of Euler's equation

$$\mathbf{x^2 + by^2 + cz^2 = w^2} \qquad (7)$$

by formulae with four parameters:

$$w = p^2 + bq^2 + bcu^2 + cv^2 \quad ; \qquad y = 2pq + 2cuv \quad ; \qquad (29)$$

$$x = p^2 - bq^2 + bcu^2 - cv^2) \quad ; \qquad z = 2pv - 2bqu$$

and with three parameters. The solution proposed by Euler and ingeminated by Carmichael is a particular case of the general solution. For the first time, there are solved two of the four twin equations and for the other two, the solutions are found again. The solutions with four and three parameters of Euler's equation are important and to be kept in mind.

It is completed the enunciation of **Lagrange's Theorem**:

Any natural number w can be represented as the algebraic sum of four squares regarding the representation of the natural numbers by sums of squares:

$$p_1^2 + q_1^2 + (u_1^2 + v_1^2) = w \quad , \quad p_2^2 + q_2^2 + 2\,(u_2^2 + v_2^2) = w \; ; \qquad (35\text{-}1)$$

$$p_3^2 + q_3^2 - (u_3^2 + v_3^2) = w \quad , \quad p_4^2 + q_4^2 - 2\,(u_4^2 + v_4^2) = w \qquad (35\text{-}2),$$

For the reasons above, regarding the solutions of the twin equations with three parameters, we deduce the completion of **Legendre's Theorem:**

Any natural number **w**, *except numbers of the form* $\mathbf{2^k\,(8\,l + 7)}$, *can be representedas algebraic sum of the three squares of integer numbers under the next four forms:*

$$W = p^2 + q^2 + u^2 \qquad (39\text{-}1)$$

$W = p^2 + q^2 + 2u^2$ (39-2)
$W = p^2 + q^2 - u^2$ (39-3)
$W = p^2 + q^2 - 2u^2$ (39-4)

Finally, it results and it can be enunciated **the Theorem of the Three Distinct Squares**, regarding the representation of the natural numbers by sums of squares, published in the previous works:

Theorem of Bratu

Every number is the sum of three squares, or of three squares with one duplicated. Further, numbers of the form 2^{2k} (8 l + 7) are only of the second type, numbers of the form 2^{2k+1} (81 + 7) are only of the first type, while numbers, of neither of these two forms, are of both types.

For any natural number z, there are at least three integer numbers (u, v, w) or/and (a, b, c), in order to have representations:

$$z = u^2 + v^2 + w^2 \quad (\alpha) \qquad (12)$$
$$z = a^2 + b^2 + 2c^2 \quad (\beta)$$

For $z = z_1 = 2^{2k} (8\,l + 7)$, we have only the representation (β),
for $z = z_2 = 2^{2k+1} (81 + 7)$, we have only the representation (α), and for $z \neq z_1$ and $z \neq z_2$, we have in the same time the representation (α) and (β).

Examples: $z_1 = 15$, we have $z_1 = 3^2 + 2^2 + 2 \times 1^2$ (β);
$z_2 = 30$, we have $z_2 = 5^2 + 2^2 + 1^2$ (α);
$z_3 = 21$, we have $z_3 = 4^2 + 2^2 + 1^2$ (α) and
$z_3 = 3^2 + 2^2 + 2 \times 2^2$ (β).

:

Pars II- Addenda about the Last Theorem of Fermat

It is published, for the first time, a completion of the arithmetical method, proposed by us in the previous works in order to prove Last Theorem of Fermat. For exponent n=4, it was found a proof among Fermat's papers, discovered and used also the principle of "the infinite descent". For exponent n=3, the theorem was first proved by Euler, who used the same method of the infinite descent. All later proofs fot different exponent exponents n, are based on the development and generalization of Euler's ideas. Yet, the arithmetical methods, the algebraic ones, the *algebraic* geometry ones proved to be not quite effective in finding a general proof of the Theorem. Finally, in 1995, the Englishman Andrew Wiles managed the prove Taniyama's conjecture, from the theory of modular forms, and he put an end to the history of this enigma. However, on one hand, the mathematical genius Pierre Fermat stated that "he found a great proof " for his statement, that time, the only means handiest being exclusively those of the numbers elementary theory; and on the other hand, the connection between distant fields of mathematics is a major difficulty in understanding Wiles' proof, which is already contested. That is why, there always existed the hope that a proof of the Great Theorem could be found using methods of the numbers elementary theory. In chapter 2 is a presented in brief the elementary current theory of the Great Theorem, especially Euler's proof.

A.M.Legendre, in this work ""Mem.de l'Acad. des Sciences, Institut de France" (1823), presented a formula that I used to make possible the passage from the cyclotomic fields to a quadratic fields. Having written the equation under symmetric form: $\mathbf{x^p + y^p + z^p = 0}$
(1-p),

Legendre used the expansion of the sum $y^p + z^p$ with p prime odd:

$$y^p + z^p = (y+z)\ \boxed{\frac{y^p+z^p}{y+z}}$$

For the second factor of the right member, he proved a general relation:

$$\boxed{\frac{y^p+z^p}{y+z}} = \boxed{}\ (Y^2 - \varepsilon\, pZ^2) \qquad (10),$$

were Z and Y are integer numerical function of z and y, and $\boxed{\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}}$

All the authors {[1], [2], [3]}, unanimously agree that presenting Legendre's formulae is useless, because "they are very complicated and they not were not of any use"; but they will always be integer numbers and the function Y will be symmetrical depending on (z,y), and the function Z will be symmetrical depending on (-z,y).

We present the formulae that Legendre found, for a few exponents:

p=3: $\mathbf{Y = z+y}$; $\mathbf{Z = z - y}$ (10-3)

p=5: $\mathbf{Y = (z+y)^2}$; $\mathbf{Z = z^2 + y^2}$ (10-5)

p=7: $\mathbf{Y = 2(y^3+z^3) - yz\,(y+z)}$; $\mathbf{Z = yz\,(z - y)}$ (10-7)

We named the expression Y and Z, by him, as "symmetrical and integer functions of Legendre', to make a distinction between them and other expressions that we will

name “rational functions of Legendre”, obtained using our method of solving equations of Pell type.
Legendre also showed that if we expand

$$v^p = (Y + \sqrt{\varepsilon p}\,Z)\,.\,(Y - \sqrt{\varepsilon p}\,Z) \qquad (11),$$

the two factors of the second member are relatively prime and , each, of the two factors of the second member are relatively prime and, each of the two factors being a power **p**, it result:

$$\boldsymbol{Z = 0 \ (mod\ p)} \qquad (12)$$

He supposed that this was the only expansion in prime factors of the numbers of form Y and Z.
As for the field of the complex numbers, for any p respectively, the statement (12) was not proved, not even subsequently.
In chapter 3 there are presented the contributions to the current theory:
1/ Reduction of the second case of Fermat’s Theorem to the first case;
2/ The method generating rational solutions (g.r.s.).
We also showed that, by applying the methods of generating rational solutions which are always possible in the case of the equations of type

$$\boldsymbol{w = Y^2 - \varepsilon\, pZ^2} \qquad (13),$$

we can determine specifically the representations of an integer number **w**, respectively, we can deduce other rational solutions, if a common solution is known, including the ordinary one, that of the quadratic equation of Pell’s type..
For **p= 4k+1** we will have the real case, the matrix **B** which generates the set of rational solutions, having the form:

$$\boxed{B = \frac{1}{p-1}\begin{bmatrix} p+1 & 2p \\ 2 & p+1 \end{bmatrix}} \qquad (17\text{-}1),$$

and for **p= 4k+3,** we will found ourselves in the imaginary case, the matrix B being written under the form:

$$\boxed{B = \frac{1}{p+1}\begin{bmatrix} p-1 & 2p \\ -2 & p-1 \end{bmatrix}} \qquad (17\text{-}2)$$

We proved that the **Lemma** [Pars 1- ch. 2] is applied also in the imaginary case.

Finally, in **the subchapter 4-4**, it is presented the proof of The Last Theorem.
For the **p= 4k+3** exponents, named “the imaginary case”, the uniqueness of the expansion in prime factors in the cyclotomic field is no longer valid. The complete novelty, except method g. r. s. , is to find a method to avoid the expansion in factors in the cyclotomic and the quadratic fields.
It is proposed and proved the following Lemma Euler-Legendre-Bratu:

Lema E-L-B:
B1- If number w has the representation

$$w = (r^2 + ps^2) \qquad (32),$$

where r and s are arbitrary integers, than

$$w^p = (Y^2 + pZ^2) \qquad (33),$$

where p a prime odd number, and Y si Z are numerical functions of r and s number, and for Z number we arethe congruence:

$$Z = 0 \pmod p \qquad (34);$$

B2- For number $w^p = (Y^2 + pZ^2)$, in the field of the rational numbers, there is a representation by the integer and symmetrical functions of Legendre- Y and Z- and at least two other representations by rational functions of Legendre Y_i and Z_i
B3- The Lemma is kept if number w has the representation

$$w = (r^2 - ps^2) \qquad (32),$$

respectively for the real case.

Result- The Last Theorem of Fermat is true.

The proof of part B1 of the Lemma ELB is made starting from the identity:

$$(a^2 + pb^2)(c^2 + pd^2) = (ac - pbd)^2 + p(ad + bc)^2 \qquad (35);$$

If we square $(\mathbf{a^2 + pb^2})$ by power **p**, by repeated multiplications, by identity (35) and we note the two terms by C_j and D_j, according the power j of w , we obtain:

$w^2 = (a^2 + pb^2)^2 = (a^2 - pb^2)^2 + p\ (2ab)^2 = C_2 + p\, D_2$;

$w^3 = (a^2 + pb^2)^3 = (a^3 - 3\, p\, a\, b^2) + p\,(3\, a^2 b - p\, b^3) = C_3 + p\, D_3$; etc.

Writing the term D_j depending on the congruence modulo p, for power **j**, we have D_p for power p:

$D_p = [p\, a^{p-1}\, b + p\, f(a,b)]$, which implies $D_{p-} = \mathbf{Z = 0 \pmod p}$ -qed

Part B2 of the lemma was proved [in chapter 4.3] using the linear transformation, which the Legendre's functions:

$$\boxed{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}} . \mathbf{B}_p \qquad (18\text{-p})$$

By matriceal relations (17), we obtain expressions for the rational functions of Legendre Y_i and Z_i.

We proved property $\mathbf{Z = 0 \pmod p}$ (34)

is kept for all the linear transformations which are specific to the quadratic form of representation of a number **w.**

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} . \mathbf{B}_p \qquad (18\text{-}p)$$

Of the congruence (34), applied to the function $\boldsymbol{Z_i}$,

$$Y_1 = \frac{1}{p+1} [(p-1)Y + 2p\,Z] \quad \text{and} \quad Z_1 = \frac{1}{p+1} [-\,2\,Y + (p-1)\,Z] \qquad (36).$$

Result- It follows **Y=0 (mod p)**,
so y= z= 0 (mod p) and the infinite descent. The Last Theorem of Fermat is true.

We close our contribution to the proof, exemplifying the case p=3.
Among all the triplet of integer numbers, relatively prime,, with x being an even number and which satisfy equation $\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 = 0}$ (38),
we choose the minimal 3-tuple, in which $|x|$ has the smallest value.
We build the integer numbers **Z** and **Y**, which are relatively prime and of different parities, by relations

$$\mathbf{Z} = z - y\,; \quad Y = z + y; \qquad (39)\,.$$

If we put **x=2u**, we obtain:

$$u^3 = \frac{1}{4}\, Y\,(Y^2 + 3Z^2) \qquad (40),$$

which the integer factors in the right member are relatively prime.
As the factor $(Y^2 + 3Z^2)$ is a cube and Y and Z are relatively prime, it is applied the **Lemma E-L-B** for cube:

$$w^3 = (Y^2 + 3Z^2) \qquad (41)$$

and we obtain: $Z = z - y = 0 \pmod 3$ (42)
We transform linearly the quadratic forms (41) by the matrix relation:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} . \mathbf{B} \;, \text{ where } B = \frac{1}{p+1}\begin{bmatrix} p-1 & 2p \\ -2 & p-1 \end{bmatrix}, \text{ for } p=3 \qquad (43)$$

and will obtain other expressions for Legendre's functions:

$$Y_1 = 2z - y \;\; \text{si} \;\; Z_1 = y \qquad (44)$$

Of the congruence $Z_1 = y = 0 \pmod 3$ (45),
associated by congruence (42), it follows

$$z = y = 0 \pmod 3 \qquad (46);$$

so, we reached a contradiction compared to the hypothesis and the infinite descent.
The Last Theorem of Fermat is true for p=3_______

&&*&*

AUSZUG

1-Teil- Das Theorem der drei deutlichen Quadraten

Vierhundert jahren bevor uns, Bachet und Fermat haben eine besondere Konjectur dargelegt: “Jedwelche positive ganze Zahl kann man als Summe der maximal vier Quadraten darstellen“. Lagrange hat eine sehr schöne Demonstration dafür gefunden, mitels Euler- Identität und Theorie der quadratischen Resten. Er hat sein Name dieses Theorems gegeben, oder „Das Theorem der vier Quadraten“ gekannt. Legendre hat wichtige Erganzungen der Demonstration mitgebracht. In den letzten 23 Iahren, in mehrere Memoires und Artikeln haben wir einige Resultaten mitgeteilt; unter anderen wir haben ein satz formuliert, die wir „Das Theorem der drei deutlichen Quadraten“ benannt haben; das läutet: „Um jeder natürlichen Zahl als eine summe von Quadraten darzustellen sind nur drei ganze Zahlen genug“. Wir haben das Theorem von Lagrange befestigt, geandert und umbenannt.
Der Ursprung dieses Theorems steht unter keine Frage, von zeitlichen Standpunkt sprechen, aber besonders denn das Theorem die Folge einer allgemeine Theorie ist, und ist das Ergebnis einer neuer Identität und einer neuer Funktion und zwar „die quadratischen Kombination“. Die ursprünglich verwendere Methode waren die algebraischen Methoden, aber fur Klarheit sind jetzt die elementaren Methoden bevorzugt. Unsere Beitrage an Zahlentheorie, die in Bibliographie detailliert sind, bergrentzten sich auf Darlegung. Als nutzbar und interessant fur die Aufgabe des Titels gaben wir folgendes gewählt: 1- Die Methode fur Erzeugung der rationallen Lösungen (e.r.l.)- die matrizische Variante und die Variante des Terms;
2- Verallgemeinerung des Theorems von Gauss. Wir haben die homogene und die an eine homogene Gleichung reduzierbare Gleichungen behandelt, unter diese Form:

$$a_1 \; x_1^2 \; + \ldots + a_i \; x_i^2 \; - \; a_{i+1} \; x_{\boxed{}} \; - \ldots - a_n \; x_{\boxed{}} \; = \; r \qquad (15),$$

geschrieben, wo $\mathbf{a_1}$ **,**$\mathbf{a_2}$ **……**$\mathbf{a_n}$ ganze positive Zahlen sind.und r auch eine ganze Zahl ist. Das Prinzip der Methode geht aus folgende Lemma heraus, in eine vereinfachte Formulierung, die sich an Lösungen mit rationellen positiven Zahlen bezieht:

Lemma 1a- Wenn eine nicht Lösung (x_1 , x_2 …..x_n) mit n>1 einer quadratische Gleichung gegeben ist, kann man durch Rekursion mindestens andere zwei Lösungen in rationallen positiven Zahlen finden, mit Ausnahme des falls wenn die

Gleichung die banalle Lösung lasst zu, woraus nur eine einzige andere Lösung zu finden ist.
Wenn eine Ordnungsbeziehung definiert ist, die Menge der Lösungen ist mittels einem orientierten Graph darstellbar. Eine **ä**quivalente und ergänzte Form der Lemma ist folgende:
Lemma 1b- Die Menge F^2 der Lösungen der Gleichung E^2 ist isomorphe mit der Menge der Knoten des orientierten Graph G^2, der durch eine Rekursion definiert ist.
Um das allgemeine vorgeschlagene Verfahren zu exemplifizieren, wir haben es zur Lösung der Gleichungen und Konstruction der Lösung für die meiste bekannte und geloste Gleichungen in der aktuelle Theorie verwendet.
-Die Gleichung von Pell: - $\mathbf{x^2 - Dy^2 = 1}$ (18-1)
Zur Bestimmung der Lösungen fur die allgemeine Gleichung kann man von jede Lösung beginnen, am einfachsten ist mit der banale Lösung, wenn es gibt, und weiter mit eine Rekursion ist die ganze der Lösungen zu erzeugen. In der graphische Darstellung die Menge der rationelle Losungen ist eine Kette.
-Die Gleichung von Pitagora- $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$ (3)
Der graph der reduzierte L ö sungen dieser Gleichung ist einen Baum.
-Die sogennante Zwillinge vor Gleichung (3):
- $\mathbf{x^2 + 2y^2 = z^2}$ (5),
von Standpunkt der Funktion „quadratische Kombination".
-Die quadratische vierglidriege Gleichung
- $\mathbf{x^2+y^2+z^2=w^2}$ (9)
spielt eine wichtige Rolle in der Darstellung der Zahlen durch Summen von Quadraten. In der matrizische Variante, die Losungen sind durch die Beziehung
$\mathbf{S_{i+1} = S_i . B}$ erzeugt, und die Matrize B ist zu schreiben:

$$B = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}} \qquad (21).$$

Hier ist ein wichtiges Satz demonstriert (P19): *Es gibt ein isomorphismus zwischen die Menge* $\mathbf{F_3^2}$ *der Lösungen der Gleichung* $\mathbf{E_3^2}$ *und die Menge derKnoten der Graph* $\mathbf{G_3^2}$*, der ansteingenden Richtung der variabile* **w**.
In 3-te Kapitel sind die Ergebnisse vorgelegt: *Identit**ä**t von Bratu, quadratische Kombination, Theorem der drei deutlichen Quadraten*.
Hier ist es demonstriert dass das Theorem der drei deutlichen Quadraten naturlich aus die Funktion „quadratische Kombination" herausgeht, und diese Funktion ist eine Folge der Identit**ä**t von Bratu und der Lemma von Bratu. Wir haben eine wunderbare Identitat gefunden, die die Lösungen der dreigliedrige

Gleichungen, besonders der Pitagorische Gleichung, der Lösungen der viergliedrige Gleichungen assoziiert.

Wenn $\mathbf{S'_1= (x'_1, y'_1, z'_1)}$ und $\mathbf{S'_2= (x'_2, y'_2, z'_2)}$ zwei Lösungen aus der Menge $\mathbf{F_2'}$ sind, die von der reduzierte Lösungen $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$, durch Verstarkung mit naturliche Zahlen h und l kommen, dann gibt es die **Identitäten von Bratu:**

a1/ $\mathbf{2\,(z'_1 . z'_2 \;\square\; x'_1 . x'_2 \square\; y'_1 . y'_2) = Z^2}$, wo Z ist ganze Zahl,

b1/ $\mathbf{X= x_1 \square\; x_2}$ ***;*** $\mathbf{Y= y_1 \square\; y_2}$ ***;*** $\mathbf{W= z_1 \square\; z_2}$ und **Z** sind die reduzierte Lösungen der viergliedrige Gleichungen*:*

$$\mathbf{X^2 + Y^2 \;\square\; cZ^2 = W^2} \qquad \textit{(7-1)}$$

Und analoge gibt es noch andere „Schwester- Identitäten“:

a2/ $\mathbf{(z'_1 . z'_2 \;\square\; x'_1 . y'_2 \square\; y'_1 . x'_2)= Z_1^2}$,wo Z ist ganze Zahl ;

b2/ $\mathbf{X_1= x_1 \square\; y_2}$ **;** $\mathbf{Y_1= y_1 \square\; x_2}$ **;** $\mathbf{W_1= z_1 \square\; z_2}$ and $\mathbf{Z_1}$ sind die Lösungen der Gleichungen *(7-1)*.

Gehend von Bratu-Identitat ab, haben wir folgende **Lemma von Bratu** demonstriert:

Von jedwelche zwei Lösungen aus den komplett System der Lösungen der quadratische dreigliedrige homogene Gleichung (3) kann man je vier Lösungen- die auch paarweisse gleich sein können- fur jede von die vier quadratische viergliedrige Gleichungen (24) erzeugen. Die vier Gleichungen haben wir „Zwillinge Gleichungen“ bennant. Auch dual ist es gilting.

Wir haben definiert: **die quadratische Kombination** ist eine numerische Funktion, CP, oder ‚□’ geschrieben, die, an jede zwei Lösungen aus dem kompletten System der Lösungen der quadratische dreigliedrige homogene Gleichung je vier Lösungen für jede von die vier quadratische viergliedrige Gleichungen erzeugt, die sogennanten Zwillinge-Gleichungen:

$$\mathbf{X^2 + Y^2 + Z^2 = W^2} \qquad (25)$$

$$X^2 + \mathbf{Y^2 - Z^2 = W^2} \qquad (26)$$

$$\mathbf{X^2 + Y^2 + 2\,Z^2 = W^2} \qquad (27)$$

$$\mathbf{X^2 + Y^2 - 2\,Z^2 = W^2} \qquad (28)$$

Die allgemeine Lösung die Gleichung von Euler

$$\mathbf{x^2 + by^2 + cz^2 = w^2} \qquad (7)$$

ist durch Formeln mit vier Parametern:

$$w = p^2 + bq^2 + bcu^2 + cv^2 \quad ; \quad y = 2pq + 2cuv \quad ; \qquad (29)$$
$$x = p^2 - bq^2 + bcu^2 - cv^2) \quad ; \quad z = 2pv - 2bqu$$

und drei Parametern.

Die von Euler vorgeschlagene und die von Carmichael wieder aufgenommene Lösung ist ein besonderes Fall der allgemeine Losung. Für erstmal sind zwei vor die vier Zwillinge- Gleichungen gelost, und für die andere zwei sind die Losungen wieder gefunden. Wichtig und zu berücksichtigen sind die Lösungen mit vier und drei Parametern für die Gleichung von Euler.Die Aussage des **Theorems von Lagrange** ist ergänzt:

Jede natürliche Zahl **w** *kann man als algebraische Summe von vier Quadraten von ganze Zahlen darstellen, in folgenden vier Formen:*

$$p_1^2 + q_1^2 + (u_1^2 + v_1^2) = w \quad , \quad p_2^2 + q_2^2 + 2 (u_2^2 + v_2^2) = w \; ; \qquad (35\text{-}1)$$

$$p_3^2 + q_3^2 - (u_3^2 + v_3^2) = w \quad , \quad p_4^2 + q_4^2 - 2 (u_4^2 + v_4^2) = w \qquad (35\text{-}2),$$

Berücksichtingend die vorligende die vorliegende Aussagen, geht es die Erganzung des **Theorems von Legendre** heraus:

Jede natürliche Zahl W*, ohne Ausnahme der Zahlen von Form* $\mathbf{2^k (8\,l + 7)}$*, kann man die von drei Quadraten von ganze Zahlen, in der folgende vier Formen darstellen:*

$$W= p^2 + q^2 + u^2 \qquad (39\text{-}1)$$

$$W= p^2 + q^2 + 2u^2 \qquad (39\text{-}2)$$

$$W= p^2 + q^2 - u^2 \qquad (39\text{-}3)$$

$$W= p^2 + q^2 - 2u^2 \qquad (39\text{-}4)$$

Am Ende, geht es **das Theorem der drei deuchtlichen Quadraten** heraus und ist sie darzulegen, die sind an die Darlegung der natürliche Zahlen durch Summe von Quadraten bezieht und in der vorige Arbeitem erschienen ist:

Das Theorem von Bratu

Jede naturliche Zahl ist die Summe von drei Quadraten und/oder Summe von drei Qudraten, voraus ein Duplikat ist.

Die Zahlen von Form $\boldsymbol{2^{2k} (8\,l + 7)}$ ***erlauben nur eine Darlegung von zweiten Typ, die Zahlen von Form*** $\boldsymbol{2^{2k+1} (81 + 7)}$ ***erlauben eine Darlegung von ersten Typ, und alle andere andere Zahlen, Ausnahme die zwei erwahnten Formen, erlauben die beide Darlegungstypen.***

Beziehungsweise, fur jede natürliche Zahl w gibt es midestens drei ganze Zahlen (u, v, w) und/oder andere Zahlen (a, b, c), sodass die Darlegungen durch summe von Quadraten sind:

$$z = u^2 + v^2 + w^2 \quad (\alpha) \qquad (12)$$

$$z = a^2 + b^2 + 2c^2 \quad (\beta)$$

Für $z = z_1 = 2^{2k} (8\,l + 7)$*, gibt es nur die Darlegung* (β)*,*

für $z = z_2 = 2^{2k+1} (81 + 7)$*, gibt es nur die Darlegung* (α)*, und fur* $z \neq z_1$ *und* $z \neq z_2$*,, gibt es gleichsezeitig die Darlegungen* (α) *und* (β)*.*

Beispielen: $z_1 = 15$, es gibt $z_1 = 3^2 + 2^2 + 2 \times 1^2$ (β);

$z_2 = 30$, es gibt $z_2 = 5^2 + 2^2 + 1^2$ (α);

$z_3 = 21$, es gibt $z_3 = 4^2 + 2^2 + 1^2$ (α) und

$z_3 = 3^2 + 2^2 + 2 \times 2^2$ (β).

II- Teil- Addenda uber Letzten Fermatproblem

Es ist hier erstmal eine Erganzung der aritmetischen Methode ausgedruckt, die wir zur Demonstrierung des Letzten Theorems von Fermat in der vorigen Arbeiten vorgeschlagen haben.

Das Letzte Fermatschen Theorem hat eine sehr einfache Darlegung:

Die Gleichung $\mathbf{x^p + y^p = z^p}$ (1)

für p>2, *in ganzen Zahlen* **x,y, z** *unlösbar ist*.

Für das Exponent p=4, ist eine Demonstration in der Papieren von Fermat gefunden, welche hat „die Methode der descente infinie"entdeckt und verwendet. Für das Exponent p=3, hat Leonhard Euler erstmal das Theorem demonstriert, unter Verwendung gleiche Prinzip. Alle weitere Demonstrationen für verschiedene Exponenten haben die Erweiterung und Verallgemeinerung der Ideen von Euler zugrunde. Aber weder die algebraischen Methoden und noch die algebraische Geometrie haben kein Erfolg in Erfindung einer allgemeine Demonstration des Theorems. Im Jahr 1995, Andrew Wiles hat die Konjectur Taniyamas von Theorie der Modulformen demomstriert und hat diese Ratsel bis ende mitgebracht.Trotzdem, einerseits Satz der matematischen Genie Pierre de Fermat sagte betreffend seine Darlegung „ist es eine wunderbare Demonstration gefunden", beruucksichtigen die verfugbaren Mitteln und zwar die elementare Theorie der Zahlen, und anderseits die Verbindung zwischen verschiedenen Gebiete der Mathematik bedeutet eine grosse Schwierigkeit um die schon bestrittene Demonstration von Wiles zu verstehen. Darum gab es standig die Hoffnung dass jemand eine Demonstration des Letzten Theorem unter Verwendung von Methoden der elementare Zahlentheorie erfinden wird. Im 2-Kapitel ist kurtzlich die aktuelle Theorie, besonders die Demonstration von Euler. Er hat folgende Lemma zugrunde: *Wenn die ganze und relativ Primzahlen* a und b *besitzen die Eigenschaft dess* ($a^2 + \mathbf{3b^2}$) *ist der Kubus einer ganzen Zahl, dann gibt es die ganze Zahlen* **s** *und* **t**, *sodass:*

$a = s(s^2 - 9t^2)$ si $b = 3t(s^2 - t^2)$ (4)

Demonstration kann durch eine Schema dargestelt sein. Die Beziehung (6):

$\mathbf{u^3}=\boxed{}\ \mathbf{a\,(a^2 + 3b^2)}$ ist essential zur Demonstration der Theoreme und in ihren generellen Form war von Legendre verwendet und von uns in unsere Forschung mitgenommen. Euler hat noch eine Identität verwendet, die spezifisch nur für das

Exponent p=3 ist; andererseits hat die Lemma demonstriert unter Voraussetzyng dass die komplexe Nummern sich einzig im Primfaktoren zerlegen.
A.M.Legendre, in seiner Werk "“Mem.de l'Acad. des Sciences, Institut de France” (1823), hat ein Formel aus der Lehre von der Kreistellung vorgestellt:

$$\boxed{\frac{y^p+z^p}{y+z}} = \boxed{} \quad \boldsymbol{(Y^2 - \varepsilon\, pZ^2)} \qquad (10)$$

Wir haben diese Formel verwendet, um die Übergang in einer quadratische Zahlenkörper zu ermoglichen. Wenn die Gleichung (1) in ihrer simmetrische Form geschrieben ist: $\mathbf{x^p + y^p + z^p = 0}$ (1-p),
ist die Zerlegung der Summe $y^p + z^p$ mit p umpaarig und Primzahl verwendbar:

$$\boldsymbol{y^p + z^p = (y+z)} \boxed{\frac{y^p+z^p}{y+z}}.$$

Für das zweiten Faktor im rechten Glied, hat Legendre die generelle Beziehung (10) demonstriert, wo *Y, Z* gewise ganze und ganzzahlige Funktionen zur y, z sind , und $\boxed{\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}}$

Alle Autoren sind einstimmig verarbeit {[1],[3]}: “Die Zusammensetzung von *Y,Z* aus den Elementen *y,z* ist sehr kompliziert und daher einer allgemeinen Betrachtung sehr unzuganglich“, aber immer werden sie ganze Zahlen sein. Die Funktion Y wird simmetrische gegen (y,z), aber Funktion Z wird simmetrische gegen (-y,z).
Hier geben wir die von Legendre gefundene Formeln, für einige Exponenten wieder:

p=3: $\mathbf{Y= z+y}$; $\mathbf{Z= z- y}$ (10-3)
p=5: $\mathbf{Y=(z+y)^2}$; $\mathbf{Z= z^2+ y^2}$ (10-5)
p=7: $\mathbf{Y= 2(y^3+z^3)- yz (y+z)}$; $\mathbf{Z= yz (z- y)}$ (10-7)

Die Funktionen Y,Z, haben wir „die simmetrische und ganze Funktionen von Legendre“ bennant, um sie von anderen Darlegungen zu verschieden, diese letzte werden wir „rationalle Funktionen von Legendre“ benennen. Sie sind unter Verwendung unserer Methode zur Lösung der Pell-Gleichungen gefunden.
Legendre hat weiter gezeigt dass v^p zerlegt ist:

$$v^p = \boxed{}\,(Y + \boxed{\sqrt{\varepsilon p}}\, Z).\ \boxed{}\,(Y - \boxed{\sqrt{\varepsilon p}}\, Z) \qquad (11),$$

die zwei Faktoren von den rechten Glied relativ primfaktoren sind und jede eine **p** potenz seiend, gibt es die Kongruenz: ***Z=0 (mod p)*** *(12).*
Er hat vorausgesetzt dass diese die einzige Zerlegung in Primfaktoren der Zahlen von Y ung Z Form ist. Betreffend das Körper der komplexe Nummern, bzw von jeder p ist die Aussage (12) nicht demonstriert, obwohl Kummer hat wichtige Progresse erreicht.
Im 3-te Kapitel sind die Beitrage an die aktuelle Theorie vorgestellt:
1/ Reduzierung des zweiten Fall des Fermatproblems an den ersten Fall;
2/ Die Methode zur Erzeugung der rationallen Lösungen (e.r.l.).

Wir haben gezeigt dass unter Anwendung der Methoden fur Erzeugung der Lösungen fur die Gleichungen $w = Y^2 - \varepsilon p Z^2$ (13), kann man koncret die Darlegungen eine ganz **w** bestimmen, bzw. kann man andere Lösungen erfinden, wenn eine Lösung der Gleichung, einschliesslich die banale Lösung der Pell-Gleichung bekannt ist. Durch die g.s.r Methode ist es die Bestimmung der minimalen positive Lösung vermieden, die in der Methode von Lagrange verwendet ist, wo die Bestimmung der Lösung nicht immer einfach ist. Im real Fall der Gleichung (13), für **p= 4k+1,** ist die Matrix B zu schreiben:

$$\boxed{B = \frac{1}{p-1}\begin{bmatrix} p+1 & 2p \\ 2 & p+1 \end{bmatrix}} \qquad (17\text{-}1),$$

unf für **p= 4k+3,** im imaginarem Fall, ist die Matrix B zu schreiben:

$$\boxed{B = \frac{1}{p+1}\begin{bmatrix} p-1 & 2p \\ -2 & p-1 \end{bmatrix}} \qquad (17\text{-}2)$$

In der generelle Methode zur Bestimmung der rationallen Lösungen für die gleichung Typ Pell,.wir haben demonstriert dass die Lemma ist auch im imaginärem Fall anwendbar. Mit den Erwähnten Berträge ist der **Satz von Legendre** wie folgt ergänzt: 1/ Im Körper der rationallen Zahlen, fur jedes ungerade Exponent **p**, gibt es mindestend drei Darstellungen der Funktionen **Y,Z**, durch die Elementen **y,z**;
2/ Es gibt eine Darstellung der ganzzahlige Funktionen **Y,Z**, wo diese simmetrische Funktionen gegen der zwei Elementen sind, aber die anderen Darstellung im allgemein nicht simmetrisch gegen die **y,z** Variabile sind; 3/ wenn die Elementen y,z ganze und relativ Primzahlen sind, und wenn für

$$v^p = \boxed{\;}\,(Y + \boxed{\sqrt{\varepsilon p}}\,Z).\,\boxed{\;}\,(Y - \boxed{\sqrt{\varepsilon p}}\,Z) \qquad (11);$$

die zwei Faktoren von dem rechten Glied sind relative Primfaktoren und jede eine p-Potenz seiend, geht es heraus dass ***Z=0 (mod p)*** (12)
Bemerkung: Aus dieser kürtzliche Vorstellung geht es heraus dass im Körper der rationallen Zahlen andere Ausdrucke für die nummerische Funktionen Y,Z von Gleichung (9) anwesend sind. Die neue mittels g.s.r. Methode erzeugte Ausdrucke **Y,Z** sind im allgemein nicht mehr simmetrisch gegen den Elementen (y,z), bzw. (-y,z) und wir haben sie die rationalle Funktionen von Legendre bennant.
Der 4 Kapitel bezieht sich an die Demonstration für das Letzte Fermatproblem.
Im Absatz 4.4 ist die Demonstration fur die irgendeine ungerade **p** Exponenten vorgestellt. Für die Exponenten **p= 4k+3,** das imaginäre Fall bennant, , die von Euler vorausgesetze einzelheit der Zerlegung in Primfaktoren im quadratische Körper gilt es nicht mehr. Ausser der Methode g.s.r., ist die Neuheit die Erfindung eines Verfahrens um die Zerlegung in Faktoren in den quadratischen Körpern zu vermeiden. Ist vorgeschlagen und demonstriert folgende **Lemma Euler- Legendre Bratu:**

Lemma E-L-B:
B1- Wenn die Zahl* w *hat die Darstellung:

$$\mathbf{w= (r^2 + ps^2)} \qquad \textit{(32),}$$

wo* r *und* s *arbitrar ganze Zähle sind, dann

$$\mathbf{w^p= (Y^2 + pZ^2)} \qquad \textit{(33),}$$

wo p eine ungerade Primzahl ist, wo* Y, Z *ganzzahlige Funktionen von y,z sind, und für die Zahl* Z *haben wir die Kongruenz:

$$\mathbf{Z= 0 \pmod p} \qquad \textit{(34);}$$

B2- Für die Zahl $\mathbf{w^p= (Y^2 + pZ^2)}$***, im Korper der rationallen Zahlen, gibt es seine Darstellung durch die simmetrische Funktionen von Legendre* - Y and Z- *und mindestens zwei andere Darstellungen durch rationallen Funktionen von Legendre*** $\mathbf{Y_i}$ **and** $\mathbf{Z_i}$ **.**
B3- Die Lemma gibt auch f ür negative Werte der Zahl* w *, durch die Darstellung

$$\mathbf{w= (r^2 - ps^2)} \qquad \mathbf{(32\text{-}1),}$$

im real Fall der Fermatschen Gleichung.
Result- Das Letzte Theorem von Fermat ist richtig.

Die Demonstration der B1-Teil der Lemma E-L-B ist gehend auf die Identit**ä**t (35) durchgeführt:

$$(a^2 + pb^2)(c^2 + pd^2) = (ac- pbd)^2 + p(ad + bc)^2 \qquad (35);$$

Wenn wir $\mathbf{(a^2 + pb^2)}$ an p=Potenz, durch Wiederholte Multieplizierung, durch Identit**ä**t (35) potenzieren, und die zwei Glieder mit C_j and D_j, entschprehend der Potenz **j** von w , erreichen wir (30):

$w^2 = (a^2 +pb^2)^2 = (a^2 -pb^2)^2 + p(2ab)^2 = C_2 + p D_2$;

$w^3 = (a^2 +pb^2)^3 = (a^3 – 3 p a b^2) + p(3 a^2b – p b^3) = C_3 + p D_3$; etc.

Wenn wir das Glied D_j abhanging von Kongruenz modulo p schreiben, fur das Potenz p**,** werden wir $D_p = [p a^{p-1} b + p f(a,b)]$ haben , und das geht

$D_{p-} =$ $\mathbf{Z= 0 \pmod p}$ -qed

Aus der Kongruenz $\mathbf{Z =0 \pmod p}$ folgt es $\mathbf{Y=0 \pmod p}$, also y= z= 0 (mod p) und „descente infinie“. Also haben wir ein Widerspruch gegen die Voraussetzung.
Mit Exemplifiezierung fur die Falle p=3 und p=5, beenden wir unsere Beitrag an der Demonstration des Letzten Theorems von Fermat.

&&*&*

CUPRINS

PARTEA I-A
TEOREMA CELOR TREI PATRATE DISTINCTE

EDITURA *REPROGRAPH*

CRAIOVA 2006

Cel care a fost denumit “print” intre matematicieni, Pierre de Fermat (1601-1665), in anul 1637, pe cand studia tripletii pitagoreici, pe marginea unei pagini a cartii “Arithmetica” lui Diophant (325-409) din Alexandria, a notat mai intai enuntul Marii Teoreme, care ii poarta numele, iar, pe o alta margine, a insemnat un remarcabil comentariu:

“Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detex
hanc marginis exiguitas non caperet”

Asa s-a nascut una dintre cele mai fermecatoare provocari pentru mintea umana, si, vreme de aproape patru veacuri, s-a derulat o tulburatoare istorie a creatiei matematice si a neistovitei munci ale unor sclipitoare genii.